UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Uso de Geogebra para la resolución y la creación de ejercicios de Geometría Analítica.

Autor/es

ALBERTO PEÑA HERNANDO

Director/es

JUAN MIGUEL RIBERA PUCHADES

Facultad

Escuela de Máster y Doctorado de la Universidad de La Rioja

Titulación

Máster Universitario de Profesorado, especialidad Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2017-18

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

Trabajo de Fin de Máster

Uso de Geogebra para la resolución y la creación de ejercicios de Geometría Analítica

Autor:

Alberto Peña Hernando

Tutor: Juan Miguel Ribera Puchades

MÁSTER UNIVERSITARIO EN PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS

Escuela de Máster y Doctorado

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

AÑO ACADÉMICO: 2017/2018

ÍNDICE

1. RESUMEN

RESUMEN

En este trabajo se propone un método para solucionar en el aula ejercicios de la parte de geometría analítica del curso de 2º de Bachillerato. El método consiste en utilizar el programa Geogebra e ir solucionando el ejercicio simultáneamente en Geogebra y en la pizarra. El principal objetivo de este trabajo es que los estudiantes visualicen este tipo de ejercicios ya que, en este curso se introducen los problemas tridimensionales y aparecen por primera vez planos, posiciones relativas, etc. y es un paso complicado para los estudiantes. Por tanto, se intenta que esta transición sea más fácil mostrando perfectamente en Geogebra cómo y por qué se sigue cada paso en un determinado problema. Aprovechando el uso de Geogebra, también se trata la importancia que han cobrado las nuevas tecnologías en la educación. Además, también se habla de la creación de problemas y por qué es una buena actividad para los estudiantes. El trabajo empieza con una introducción y hablando de los objetivos y del marco teórico, después se desarrolla la Unidad Didáctica y acaba con una discusión y conclusión.

Palabras clave: Geometría Analítica, visualización, creación, Geogebra.

ABSTRACT

In this paper a method is proposed in order to solve in the exercises of the analytical geometry part of the 2nd year of Bachillerato. The method consists of using Geogebra to solve the exercise simultaneously in Geogebra and on the board. The main objective of this work is for students to visualize this type of exercises because, in this course, three-dimensional problems are introduced and plans, relative positions, etc. appear for the first time, so it is a complicated step for the students. Therefore, we try to make this transition easier by showing perfectly in Geogebra how and why each step is followed in a given problem. Taking advantage of the use of Geogebra, the importance of new technologies in education is also discussed. In addition, we also talk about the creation of problems and why it is a good activity for students. The work begins with an introduction, the objectives and the theoretical framework of the project, then the teaching unit is developed and it ends with a discussion and conclusion.

Key words: Analytic Geometry, visualization, creation, Geogebra.

2. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

En este trabajo se propone un método para trabajar la parte de Geometría Analítica del curso de 2º de Bachillerato. Se ha decidido escoger esta etapa porque es cuando se empiezan a resolver problemas tridimensionales y la diferencia de contenidos que se da es bastante importante. El método que se propone es la utilización del software Geogebra para ayudar a visualizar a los estudiantes los contenidos y ejercicios de esta parte de las Matemáticas y utilizar también el programa para la creación de problemas, un recurso educativo muy interesante, del que se habla en profundidad más adelante.

Otro motivo por el que se ha escogido esta parte de las Matemáticas es porque en la Evaluación de Bachillerato para Acceso a la Universidad (EBAU) normalmente se plantea un problema correspondiente a esta Unidad Didáctica. Por lo tanto, es conveniente que los estudiantes dominen los conceptos que se imparten en esta unidad y sean capaces de resolver los distintos tipos de ejercicios que se pueden plantear.

Aunque se ha elegido la etapa de Bachillerato, la idea y el método propuestos en este trabajo es extrapolable a otros cursos de Educación Secundaria y a otras áreas de las Matemáticas.

Gran parte de la complejidad de los problemas que se plantean en esta etapa viene por la dificultad de visualizar el problema; qué pide el enunciado, qué se consigue al hacer un determinado paso, qué datos se manejan en el problema, etc. Hay estudiantes que tienen una visión espacial muy buena y por eso, parten con una buena ventaja a la hora de realizar estos problemas; sin embargo, también existen algunos alumnos que presentan más dificultades. Por ello, pensando en cómo se podría intentar que todos los estudiantes pudieran visualizar correctamente estos problemas, se ha pensado en incorporar a las clases el programa Geogebra, tanto para las explicaciones de teoría como para la resolución cada uno de los ejercicios que se plantean. Por este motivo, este proyecto intenta atender a la diversidad que se puede encontrar en un aula ayudando a aquellos estudiantes que presentan más dificultades para aprender esta parte de Geometría Analítica.

Más adelante, se plantea cómo incluir el proyecto en una Unidad Didáctica para estudiar la geometría analítica en 2º de Bachillerato en la que se detalla el método propuesto pero, básicamente, la idea es ir resolviendo problemas paso a paso y de manera simultánea en el Geogebra (proyectado en una pantalla en clase) y en la pizarra. De esta manera, los estudiantes pueden visualizar perfectamente el problema, comprender por qué se realizan los distintos pasos en la resolución del problema, el significado geométrico de las distintas operaciones y, también, pueden comprobar que el resultado que ofrece Geogebra y al que se llega en la pizarra es el mismo.

También se plantea en la Unidad Didáctica una actividad en la que los estudiantes tienen que crear un problema de geometría analítica. La creación de problemas potencia la capacidad para resolverlos, la creatividad de los estudiantes, mejora su actitud hacia las matemáticas, su comprensión lectora, su capacidad de pensar y modelizar, etc. En definitiva, es una herramienta muy potente de la que se puede sacar mucho partido y que no se utiliza mucho en las aulas.

Crear problemas es más difícil que resolverlos, es ir un paso más allá. Con esta actividad se propone un reto para los estudiantes con más capacidades y que tienen mayores inquietudes. Por lo tanto, utilizando este recurso se está atendiendo también a la diversidad aunque, en este caso, a los estudiantes con más capacidades intelectuales.

Durante todo el proyecto y la Unidad Didáctica, el programa Geogebra juega un papel importantísimo. Hoy en día, los estudiantes usan las TIC (Tecnologías de la Información y Comunicación) casi permanentemente, pero no suelen utilizarlas para estudiar, salvo búsqueda de información en Internet. Utilizando el Geogebra para resolver problemas se les enseña una herramienta con la que pueden trabajar y a la que pueden recurrir cuando no sepan resolver un determinado problema de matemáticas.

Geogebra tiene una aplicación para móviles que es muy fácil de usar. Con este trabajo se pretende que los estudiantes se den cuenta de que pueden utilizar su propio móvil para aprender. Con el uso de las nuevas tecnologías para resolver problemas y estudiar matemáticas, se pretende también que los alumnos sientan un mayor interés por el tema ya que para ellos es más estimulante trabajar con el móvil o con un ordenador que con un cuaderno y un bolígrafo exclusivamente.

Hace más de dos décadas que las nuevas tecnologías empezaron a formar parte de nuestro día a día, facilitando muchas tareas. Poco a poco estas nuevas tecnologías han ido entrando en el aula, los docentes hoy en día utilizan presentaciones, vídeos, etc. para dinamizar sus clases y que éstas resulten más atractivas para los estudiantes. Sin embargo, creo que todavía queda un gran camino por recorrer ya que no se aprovechan, ni mucho menos, todos los recursos de los que se disponen que podrían hacer el proceso enseñanza-aprendizaje mejor, con más calidad educativa, más interesante para los alumnos, más motivante, etc.

Los docentes deben intentar evolucionar junto a la tecnología, es decir, adaptarse a los distintos cambios y a las nuevas herramientas que surgen cada día y que ofrecen multitud de posibilidades y recursos. Se debe tratar a las herramientas tecnológicas como un recurso más para aprender, para mejorar la manera de enseñar, y no sólo como un elemento de ocio que se utiliza de vez en cuando en las aulas para desconectar del día a día.

3. OBJETIVOS

Los dos objetivos principales que se desean alcanzar con este proyecto son, por un lado ayudar a los estudiantes a visualizar los problemas de geometría analítica y por otro, darles una serie de instrucciones para que sean capaces de crear un problema de este bloque de la asignatura de Matemáticas. Los dos objetivos tienen un fin común, conseguir que los estudiantes aprendan los conceptos que se trabajan en la Unidad Didáctica de Geometría Analítica de 2º de Bachillerato y que sean capaces de solucionar los ejercicios que se pueden plantear en esta unidad.

Aparte de estos dos objetivos principales, se trabajan una serie de objetivos específicos.

Uno de estos objetivos específicos que se persigue es que los alumnos utilicen las TIC para el aprendizaje. Los adolescentes hoy en día tienen un contacto con la tecnología casi permanente, la utilizan para comunicarse, para ocio, etc. Muchos de ellos sí usan Internet para buscar información para realizar algún trabajo, pero la gran mayoría de ellos desconoce programas como el Geogebra que pueden utilizar para estudiar matemática. Con este proyecto se pretende enseñarles una herramienta que tienen disponible gratuitamente, que la pueden utilizar incluso en sus teléfonos móviles, fácil de utilizar y que es muy potente. Se intenta, por tanto, inculcar el hábito de utilizar las TIC para aprender, ya sea el Geogebra en Matemáticas u otro software que les pueda ayudar en otra asignatura.

Se ha comentado que uno de los objetivos principales es ayudar a los estudiantes a la visualización de estos ejercicios. Pero, aparte de ayudarles a visualizar estos ejercicios en concreto se desea mejorar su capacidad de interpretar una imagen, de comprenderla, analizarla, de transformar la información visual que están recibiendo. El trabajo de esta capacidad les ayudará en su vida académica y profesional, más allá de esta Unidad Didáctica y de esta asignatura. Por lo tanto, otro objetivo específico es mejorar la visualización de los estudiantes para que interpreten mejor la información que reciben.

El último objetivo específico que se pretende alcanzar con este proyecto es proporcionar a los estudiantes una serie de herramientas con las que puedan desenvolverse mejor en su vida académica. La primera herramienta tiene que ver con el Geogebra y las nuevas tecnologías. Hoy en día los estudiantes tienen a su disposición un sinfín de recursos con los que pueden estudiar y trabajar; tienen muchísimos programas, infinidad de información en Internet, etc. Muchas veces el problema que existe en Internet es el de saber filtrar la información válida y contrastada con la que no lo es. Por eso en este proyecto se utiliza Geogebra como un recurso que los estudiantes pueden utilizar para estudiar la Unidad Didáctica de Geometría Analítica pero también para otras muchas áreas de las Matemáticas. Poniendo el caso del Geogebra, existe una base de datos que puede ser consultada gratuitamente en la página web del programa, en la sección de "Recursos" (https://www.geogebra.org/materials) donde se puede encontrar multitud de trabajos ya hechos en Geogebra: demostraciones de teoremas, áreas y volúmenes de diferentes figuras, etc. Se desea que los estudiantes vean la gran variedad de opciones para aprender que ofrece Internet y que lo vean como una posibilidad real para estudiar. Además, es realmente importante en nuestra sociedad el ser capaz de aprender utilizando Internet y otros recursos disponibles. En la adultez, ya sea en el trabajo para adquirir determinadas habilidades o para buscar información de un tema que desconoces o en casa para hacer cualquier tipo de solicitud u otra tarea es vital ser capaz de consultar las fuentes adecuadas y solucionar los problemas que se plantean. Y esta es una habilidad que es importante que los estudiantes adquieran en sus hogares y en el colegio también. Otra herramienta que se proporciona a los estudiantes con este proyecto es la de creación de problemas. Es un recurso que pueden utilizar para estudiar, para prepararse un examen, ver el nivel de dominio que tienen sobre un cierto tema, etc. Con estas herramientas, se desea preparar a los alumnos para que tengas más recursos y sean más competentes a la hora de solucionar problemas, académicos o personales.

4. MARCO TEÓRICO

En este apartado se va a exponer la metodología y los recursos que se van a utilizar para implementar este proyecto en el aula y se va a explicar el estado de la cuestión, es decir, cómo se trabaja hoy en día en las aulas de los institutos, cómo ha evolucionado la enseñanza, etc.

4.1. Metodología

De una forma muy general se puede entender la metodología como la forma de enseñar de un docente, el papel que tiene el profesor y los estudiantes en las diferentes sesiones. Se puede decir que son los principios que guían el proceso de enseñanza-aprendizaje. Estos principios han evolucionado en España con la entrada de las diferentes leyes de educación. Desde la entrada de la LOGSE en 1990 y, sobre todo con la LOE (2006) y la LOMCE (2013) la educación ha tendido hacia unos principios metodológicos que promueven la independencia y autonomía de los estudiantes, la creatividad, la interdisciplinariedad, un aprendizaje significativo y que atienda a la diversidad del aula, etc.

Como estipula la Orden ECD/65/2015, del 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, los métodos didácticos se deben elegir en función de lo que se sabe que es óptimo para alcanzar las metas propuestas en función de los condicionantes. Es decir, no existe un método didáctico ideal que sea mejor en todos los casos si no que, en cada aula hay unos condicionantes como son el nivel socioeconómico de los estudiantes, la diversidad propia del aula, el ambiente del colegio, etc. que son los que determinan qué métodos didácticos son los que mejor se pueden adaptar a un aula específica.

Los métodos docentes deben potenciar la motivación y el interés de los estudiantes por aprender y, en general, se recomienda usar metodologías activas que faciliten la participación del alumnado, intentando emular situaciones reales.

Las estrategias de enseñanza son propuestas de acción que recogen los principios metodológicos; es decir, cómo se va a desarrollar el proceso enseñanza-aprendizaje, de forma más concreta. Existen multitud de estrategias de enseñanza: clase magistral, aprendizaje por proyectos, aprendizaje cooperativo, debates, grupos de discusión, etc.

La lección magistral consiste en la explicación de los conceptos por parte del profesor, siguiendo un esquema estructurado y ordenado con la intención de facilitar a los estudiantes el aprendizaje. Esta es la forma más tradicional de enseñar. Si bien es cierto que hoy en día se conocen otras estrategias educativas que hay que poner en práctica en las aulas y que fomentan un papel más activa del estudiante en el proceso enseñanza-aprendizaje, éstas pueden convivir perfectamente con lecciones magistrales cuando el docente las considere necesarias ya que todas las metodologías tienen sus ventajas e inconvenientes y lo mejor es una combinación de diferentes metodologías. (Fidalgo, 2016)

Este proyecto se ha diseñado para ser introducido en 2º de Bachillerato, que es un curso en el que el tiempo es muy limitado ya que los estudiantes se enfrentan a las pruebas de acceso a la universidad a finales de curso y, para entonces, deben dominar toda la asignatura. Los contenidos de la asignatura de Matemáticas II, la asignatura de Matemáticas de los Bachilleratos de Ciencias, son increíblemente altos y muchos docentes tienen problemas para acabar a tiempo la asignatura. Esto conlleva que un alto porcentaje de las clases de matemáticas de este curso sean clases magistrales en las que el profesor explica los diferentes conceptos de los temas del curso. Esto sucede por varios motivos, el primero es que la metodología de clases magistrales es a la que están más acostumbrados la gran mayoría de los docentes. Además, otras metodologías como puede ser aprendizaje por descubrimiento, trabajo colaborativo, etc. consumen una cantidad de tiempo mayor del que, tristemente, no se dispone. La falta de tiempo para utilizar otras metodologías no es un problema únicamente de segundo de Bachillerato sino que está presente en toda la educación secundaria pero, sí que se agrava en este curso debido a los exámenes de acceso a la universidad, como ya se ha comentado.

Pese a esta problemática, también se propone en este proyecto un trabajo cooperativo, en el que los estudiantes tendrán que trabajar en grupos. La cooperación es clave para mejorar las relaciones sociales de los estudiantes, para que los alumnos aprendan a trabajar en equipo y tomen una participación más activa en su aprendizaje, por eso se debe promover el trabajo cooperativo en las aulas en la medida de lo posible.

Para un correcto uso de esta estrategia de enseñanza, los grupos en los que se divide la clase deben ser lo más heterogéneos posibles, intentando que se reproduzca la diversidad del aula en el propio grupo. También el docente debe asegurarse que el trabajo se distribuye de manera equitativa, es decir, que todos los componentes del grupo sean responsables de una parte del trabajo y que no haya una parte del grupo que hace todo el trabajo. Además, al distribuir la tarea no se pretende que el trabajo se convierta en una actividad individual sino que debe existir un trabajo en grupo, con intercambio de ideas y con un objetivo y un método de trabajo común. (Linares, s.f.)

El objetivo del trabajo cooperativo es doble, por un lado se desea que los estudiantes aprendan a trabajar en grupo y por otro, se desea que aprendan trabajando en grupo; es decir, que trabajen los mismos contenidos que se trabajarían de forma individualizada. Todo esto proponiendo una actitud más activa ante el aprendizaje, dando más responsabilidad a los estudiantes, mejorando su capacidad de comunicación y favoreciendo las relaciones de amistad y la capacidad de tolerancia de los alumnos.

También es importante definir el papel del docente cuando se hace una actividad cooperativa. Pese a que dentro de cada grupo se definen unos roles, el profesor sigue siendo el líder, la persona que tiene el control de la tarea y del comportamiento de los estudiantes. Por ello, el docente es el encargado de especificar los objetivos de la tarea, de seleccionar el número de estudiantes por grupo y asegurarse de que éstos son heterogéneos. También debe configurar el aula para que el trabajo por grupos sea efectivo, moviendo y organizando las mesas y sillas para dividir la clase. Debe ser el encargado de dar los materiales necesarios para el desarrollo de la tarea a los estudiantes y también es el que explica la tarea, los contenidos que se trabajan, los objetivos que se quieren alcanzar, los criterios de evaluación, etc. Así mismo, debe observar las interacciones que se dan entro los alumnos e intervenir cuando lo crear necesario o cuando los estudiantes soliciten su ayuda. Finalmente, el docente debe ser el encargado de evaluar los trabajos. (Linares, s.f.)

Por todos los beneficios que se han comentado anteriormente, el trabajo cooperativo es una estrategia metodológica que ha cobrado un peso importante en la educación y por tanto, los docentes deben conocer esta técnica y saber aplicarla correctamente en un aula.

4.2. Uso de Geogebra en la docencia

Es indudable el importante papel que juegan las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) en la sociedad de hoy en día. La facilidad con la que se puede acceder a la información, las múltiples maneras para comunicarse a través de Internet y otros muchos avances que ha sufrido la sociedad en las últimas décadas han cambiado la forma de vida de las personas. Este cambio también se ha producido en las aulas, en las que poco a poco, las nuevas tecnologías han ido entrando en juego y han cambiado la forma en la que se enseña.

El uso de las TIC en el aula ayuda a mejorar la motivación de los estudiantes ya que se sienten más cómodos al utilizar las herramientas con las que pasan mucho tiempo de ocio. Se desea fomentar el interés del alumno y su autonomía e iniciativa.

En lo que se debe trabajar es en la integración de las TIC en el currículo, que sean una herramienta con la que aprender cierto contenido. “La integración curricular es aprender X con el apoyo de la tecnología Y”, Sánchez (2002). Por ejemplo, estudiar dinámicas poblacionales con un software que estudie la mortalidad, la natalidad y el crecimiento de una población en función de una serie de variables manipulables.

En el caso de este proyecto, el software que se va a utilizar es el programa Geogebra y se va a utilizar para estudiar geometría analítica aunque también se puede aplicar a otros campos de las matemáticas como estudio de áreas y volúmenes, cónicas, etc.

Markus Hohenwarter es el creador de Geogebra. El proyecto surgió en 2001 como parte de la tesis de Markus en la universidad de Salzburgo. Hoy en día, sigue trabajando en diferentes actualizaciones e implementaciones para el programa en la Universidad de Linz, Austria. (Lavicza, 2011)

Con Geogebra se puede realizar todo tipo de construcciones geométricas y trabajar algebraicamente con funciones, sus derivadas, integrales, etc. La ventaja de Geogebra con respecto de otros programas con el mismo objetivo es la sencillez para usarlo. Para dominar otros programas se debe conocer una sintaxis o un lenguaje de programación que puede resultar difícil. Sin embargo, Geogebra es fácilmente manipulable debido a su interfaz. Ésta es una de las principales razones por la que rápidamente alcanzó una alta popularidad. Otro de los motivos es que es un software libre y que los proyectos que se han creado se pueden exportar en diferentes formatos: HTML, PNG, PDF, etc.

Con el paso de los años ha ido actualizándose, hoy en día está disponible para descarga la versión 6. El programa ofrece diferentes vistas que se vinculan entre ellas para trabajar:

- Vista gráfica 2D: para trabajar con puntos, rectas, figuras geométricas, etc. Se pueden calcular intersecciones, distancias, rotaciones, etc.
- Vista gráfica 3D: se amplía lo anterior a tres dimensiones; por tanto, se puede trabajar con planos, funciones de dos variables, etc.
- Vista algebraica: es una ventana donde se listan los objetos representados en las anteriores vistas gráficas.
- Vista de cálculo simbólico (CAS): sirve para realizar diferentes cálculos (derivadas, integrales, cálculos con matrices, etc.)
- Vista hoja de cálculo: plantilla con celdas para tratar con datos numéricos.
- Vista de Probabilidad y Estadística: en esta vista se pueden representar diferentes funciones de probabilidad.

Otra de las ventajas que tiene este programa es que tiene una comunidad muy grande de docentes que lo utiliza y que realiza diferentes proyectos que pueden ser consultados por cualquier persona si los tiene colgados en su perfil de Geogebra. Esto es muy útil para los docentes ya que existen trabajos muy interesantes que pueden ser consultados y se pueden utilizar en clase para trabajar diferentes temas. En la página web de Geogebra existe una pestaña llamada *"Recursos para el aula"* donde se pueden buscar proyectos del tema deseado. Ésta es una gran iniciativa por parte de Geogebra ya que si un docente comparte un proyecto que ha realizado, puede ayudar a muchísimos profesores y estudiantes de todas las partes del mundo.

Esto que se ha detallado es lo que existe hoy en día, las herramientas de las que ya se puede disponer en un aula para trabajar pero, ¿cómo serán estas herramientas en el futuro? Esta pregunta es, desde luego, imposible de contestar con total seguridad. Pero, en Geogebra ya están trabajando con la realidad aumentada, y es posible que se tienda hacia eso en un futuro cercano.

La realidad aumentada consiste en una combinación del mundo real con el virtual utilizando un proceso informático. Así, es posible añadir información visual a la realidad y crear diferentes experiencias interactivas. (Rajasree, Varsha, Susmitha, Praveena y Harika, 2013)

Desde Geogebra ya están trabajando para utilizar la realidad aumentada en su programa matemático. Así, sería posible posicionar objetos matemáticos en cualquier parte y en cualquier superficie de tal manera que podrían ser vistos desde todos los ángulos y se podría incluso recorrerlos literalmente.

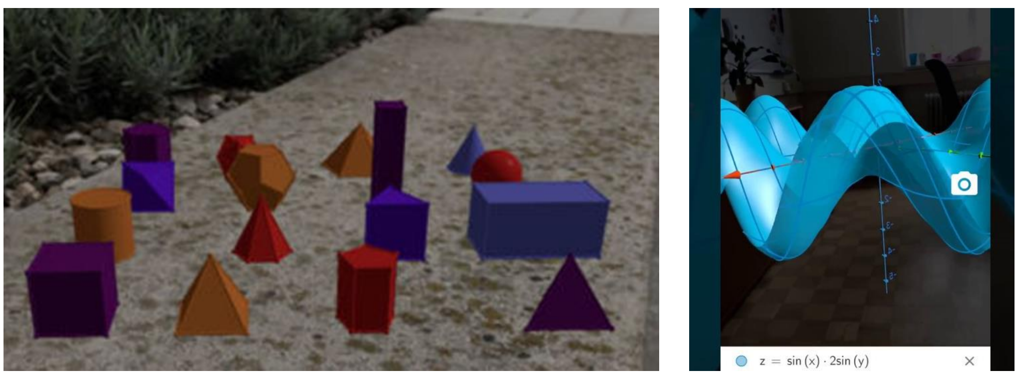

Figura 1. Aplicación móvil de realidad aumentada de Geogebra

Ya existe una aplicación para IOS y seguro que en un futuro se mejorará y potenciará mucho más. Las posibilidades que ofrecería esta herramienta serían infinitas. Como ejemplo las dos imágenes anteriores; en la primera se puede reconocer y trabajar con figuras geométricas, el número de caras, aristas, vértices, ángulos, etc. y en la segunda en la que está representada una función en dos variables, así se puede estudiar su simetría, su periodicidad, sus máximos, mínimos, continuidad, etc.

Para los estudiantes sería muy interesante poder trabajar con esta herramienta. Por ejemplo, respecto a la primera imagen, se podría decir a los estudiantes que hicieran fotografías (o capturas de pantallas) de los prismas, o de las pirámides, etc.

Como se ha comentado anteriormente, no se puede saber qué deparará el futuro pero es razonable pensar que esta herramienta pueda ser usada en las aulas en un futuro no muy lejano.

4.3. Creación y contextualización

En el capítulo de objetivos ya se ha comentado que uno de los objetivos principales del trabajo es que los estudiantes sean capaces de crear un problema de geometría analítica.

Como se ha dicho, la creación de problemas es una actividad muy interesante para los estudiantes ya que requiere de un dominio mayor de la materia en cuestión.

Una de las primeras personas que propuso utilizar la creación de problemas para el estudio de las matemáticas fue Belfield en 1887. Más tarde, en 1938, Einstein e Infeld dijeron que "la formulación de un problema es a menudo más importante que su solución que puede ser simplemente una cuestión de habilidad matemática".

A lo largo de la historia se ha definido varias veces el concepto de creación de problemas. Por ejemplo, Silver, Mamona-Downs, Leung y Kenny (1966) definieron la invención de problemas de la siguiente manera:

La generación de nuevos problemas y cuestiones matemáticas, así como la reformulación de problemas dentro del proceso de resolución de un problema dado cuando el resolutor se vuelve a plantear el problema dado para tratar de resolverlo de manera más asequible". También en 1996 Stoynova y Ellerton definieron el concepto como: "el proceso por el que, basándose en su experiencia matemática, los estudiantes construyen interpretaciones personales de situaciones concretas y las formulan como problemas matemáticos significativos.

Bonotto en el 2009 dijo que la creación de problemas lleva a los estudiantes a un pensamiento crítico ya que deben comprender qué datos son significativos y cuáles no, si la información que tienen es suficiente para poder solucionar el problema y por último, pensar si los datos y el resultado del problema son lógicos y coherentes.

En 1996, Stoynova y Ellerton clasificaron la invención de problemas en libre, estructurada y semiestructurada.

- Situación libre: los estudiantes tienen total libertad para crear el problema; por ejemplo se puede pedir que esté relacionado con algún tema en particular.
- Semiestructurada: se proporciona a los estudiantes una situación abierta y se tienen que inventar un problema en relación a esa situación.
- Estructurada: para crear el problema los estudiantes se tienen que basar en un problema específico.

Para crear problemas, Silver, Stoynova y Ellerton presentan las siguientes estrategias en 1996.

- Manipulación de restricciones: modificar las condiciones dadas.
- Manipulación del objetivo: modificar las preguntas de un problema sin cambiar los datos.
- Simetría: intercambiar las condiciones y el objetivo de un problema determinado.
- Encadenamiento: extensión de un problema determinado de tal manera que primero se tiene que resolver el problema original y después se añaden más preguntas para solucionar.

Ellerton en 2013 indica que, si no se incluye la invención de problemas en el currículo de matemáticas, la experiencia de los estudiantes en las clases no es completa ya que, como objetivo final tienen la resolución de problemas.

La creación de problemas es también un recurso de atención a la diversidad, en este caso para atender a estudiantes con altas capacidades intelectuales. Krutetskii en 1976 realizó un estudio en el que comprobó que los estudiantes con altas capacidades podían resolver un ejercicio de invención de problemas mientras que los estudiantes con capacidades menores no podían.

Otra solución para paliar la falta de interés que muchas veces muestran los estudiantes por las matemáticas es la contextualización de los problemas, es decir, plantear un problema matemático basado en una situación que hipotética o real pero que, en ambos casos, es una situación factible y además familiar para el alumno.

Generalmente los problemas de matemáticas son abstractos y para los alumnos es complicado ver una aplicación en la vida real de estos problemas. Es verdad que también hay que trabajar la capacidad de abstracción de los estudiantes ya que esto es muy importante para su desarrollo cognitivo pero, también es importante que vean que los problemas que realizan en clase tienen aplicación en la vida real.

Son muchos los psicólogos y pedagogos que defienden utilizar las experiencias de los estudiantes para enseñar: Jean Piaget, Paulo Freire, Paul R. Pintrich, M. Page, Ernst von Glasersfeld y su teoría constructivista, etc. Estos autores defienden que los estudiantes aprenden mejor cuando se relacionan los diferentes conceptos con la realidad que les rodea.

Las matemáticas están presentes en muchos aspectos de la vida, por lo tanto es muy fácil hacer conexiones matemáticas y contextualizar los problemas. Por ejemplo, se pueden encontrar multitud de figuras geométricas a nuestro alrededor, se pueden plantear ecuaciones relacionadas con compras en una tienda, se puede estudiar estadística con las alturas de los estudiantes, etc. Por lo tanto, siempre que sea posible, se debe introducir algún problema contextualizado para ganar el interés de los estudiantes y para mostrarles que lo que se está estudiando tiene su aplicación en la vida real.

4.4. Geometría analítica: docencia y visualización.

Para hablar de los orígenes de la Geometría analítica hay que remontarse al S. XVII. Según G. Fuller y D. Tarwater en su libro Geometría Analítica, 1995, el Álgebra y la Geometría se habían estudiado como disciplinas matemáticas diferentes hasta que, en 1637 Descartes publicó “*La Géométrie”*, apéndice de su obra “El discurso del Método”, en el que unió estas dos ramas de las Matemáticas. La principal característica con la que se identifica esta nueva área de estudio de las Matemáticas es el uso de un sistema coordenado que permite referenciar cualquier punto del espacio con respecto a unos ejes.

Por lo tanto, se considera a Descartes, además de a Fermat, matemático francés también del S.XVII, como los matemáticos que comenzaron a sentar las bases de la geometría analítica.

Josep Gascón (2002) explica el debate que se produjo en España en los años 70, en el que se planteaba si se debía estudiar geometría analítica o sintética (geometría pura) en la educación obligatoria. Se llegó a un cierto consenso en el que se impartía la geometría sintética en la etapa obligatoria y la geometría analítica en la post-obligatoria. Con la implementación de las nuevas leyes de Educación (Ley orgánica de Educación (LOE) en 2006 y Ley orgánica para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) en 2013) cambia el currículo de Matemáticas y en el último curso de la etapa obligatoria sí se dan nociones a los estudiantes de geometría analítica. Por ejemplo, en el currículo de la Comunidad Autónoma de La Rioja, en los contenidos de 4º de E.S.O, aparece una iniciación a la geometría analítica en la que se estudian coordenadas, vectores, ecuaciones de la recta y paralelismo y perpendicularidad. En el primer curso de Bachillerato se profundiza más en estos conceptos y en el segundo curso es donde se amplía la geometría analítica a tres dimensiones.

Con el uso de Geogebra para enseñar geometría analítica se pretende mejorar la visualización de los estudiantes. Según Cantoral y Montiel (2001), la visualización es la capacidad de representar, generar, documentar, transformar y comunicar la información visual. Es decir, no se trata de ver una imagen, si no de comprenderla.

Adriana Schilardi (2014) después de realizar el test de Felder-Silverman, que determina el estilo de aprendizaje dominante, en alumnos de ingeniería, llega a la conclusión de que la componente visual tiene un peso importante en referencia a entrada de información. A la vista de estos resultados propone que los docentes deben preparar estrategias de enseñanza que utilicen diferentes medios (sonidos, vídeos, textos, etc.) pudiendo apoyarse en las nuevas tecnologías para crear los diferentes recursos.

Después de realizar un estudio en el que distintos estudiantes debían resolver problemas en Geogebra y a bolígrafo y papel, Iranzo y Fortuny (2009) hacen una enumeración de las distintas tipologías de comportamiento de los estudiantes. Así, distinguen entre estudiantes autónomos, instrumentales, procedimentales y naíf. Los autónomos son intuitivos, buenos resolviendo problemas. Estos estudiantes utilizan Geogebra para optimizar las estrategias de resolución y para explorar contenidos más avanzados. Los estudiantes instrumentales son los que reducen un problema geométrico a uno algebraico. Tienen alguna dificultad para resolver los problemas a mano y Geogebra les ayuda ya que les ofrece un soporte visual, conceptual y algebraico. En general, son alumnos que no muestran dificultades para utilizar el programa. Los estudiantes procedimentales son menos intuitivos y más analíticos. Tienen menor grado de conocimientos que los instrumentales pero no tienen ningún problema para utilizar Geogebra. Por último, los alumnos de tipología naíf presentan muchas dificultades con los conceptos, con el uso de herramientas algebraicas y con la visualización. Utilizan pocas herramientas de Geogebra y no tienen una estrategia de resolución clara, pero el programa les ofrece un soporte visual sobre el que intentan razonar.

Las conclusiones que obtienen de este estudio es que la mayoría de los estudiantes considera que Geogebra les ayuda a visualizar el problema y a sortear obstáculos algebraicos. El programa consigue que los alumnos adquieran un pensamiento más geométrico y facilita la resolución de los problemas a los estudiantes (sobre todo a las tipologías instrumental, procedimental y naíf).

5. PROPUESTA. UNIDAD DIDÁCTICA DE GEOMETRÍA ANALÍTICA.

5.1. Introducción

La unidad didáctica que se plantea corresponde al segundo curso de Bachillerato de la asignatura de Matemáticas II, perteneciente al bloque de Geometría.

La parte de geometría analítica del segundo curso de Bachillerato da un salto de nivel importante respecto al primer curso y a lo estudiado en los cursos de ESO y es que, por primera vez, los problemas que se plantean son tridimensionales. Se introduce el concepto de plano, las ecuaciones de las rectas se vuelven algo más complicadas, se deben estudiar posiciones relativas, en definitiva, los ejercicios que se deben resolver son más complicados y liosos para los estudiantes.

Una gran ayuda para resolver estos ejercicios es una buena visión espacial; al encarar un ejercicio, antes de empezar a resolverlo es bueno visualizar qué es lo que el ejercicio pide y qué pasos debería realizar para resolverlo. Sin embargo, no todos los estudiantes tienen una buena visión espacial y a algunos de ellos, esta parte de la asignatura les cuesta bastante. Es por eso que en esta unidad didáctica se le va a dar un uso muy importante a la herramienta Geogebra, que ayudará a los estudiantes a visualizar el problema que se les plantea y a familiarizarse con este tipo de ejercicios.

La idea es que en cada ejercicio que se resuelva en clase se use el Geogebra para resolver simultáneamente el problema de tal manera que, en cada paso, se resuelva primero en el Geogebra para que se visualice este paso, y después se utilicen las herramientas matemáticas que se explican en esta unidad para resolver el problema en la pizarra. La vista 3D de Geogebra permite rotar la vista y así, poder visualizar mejor los problemas, por ejemplo: porqué el vector director de una recta es el vector normal del plano perpendicular a dicha recta, o porqué para hallar el ángulo de un plano y una recta se utilizan el vector normal del plano y el vector director de la recta, etc.

Además, para finalizar la unidad didáctica se propone un ejercicio de creación y contextualización de problemas. Crear problemas es un ir un paso más allá de solucionarlos, requiere de un conocimiento y dominio mayor de la materia y, por ello, es un gran ejercicio para los estudiantes. Además, la contextualización de un problema ayuda a mejorar el interés y la motivación de los estudiantes.

Los conocimientos previos necesarios para afrontar esta unidad didáctica son los correspondientes a la geometría analítica en el plano: ecuaciones de la recta, vectores, pendiente, etc. que se estudian en la ESO. También se ha estudiado en una unidad didáctica anterior los vectores en el espacio, operaciones (producto escalar, vectorial y mixto) y dependencia e independencia lineal.

Los contenidos y los criterios y estándares de evaluación son los que impone el Decreto 21/2015, de 26 de junio, por el que se establece el currículo de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de La Rioja.

5.2. Objetivos

Existen varios objetivos que se desean alcanzar con el trabajo de esta unidad didáctica. Estos objetivos agrupan tanto objetivos puramente matemáticos, de conceptos, como objetivos de uso de las TIC, del interés y la actitud hacia la asignatura, etc. Estos primeros objetivos que se exponen son los referidos a conceptos matemáticos.

- Obtener las ecuaciones del plano y de la recta en sus distintas formas, sabiendo pasar de unas a otras e identificando sus elementos característicos.
- Analizar las posiciones relativas de un plano y una recta.
- Manejar el producto escalar, vectorial y mixto de vectores, conociendo su expresión y su significado geométrico y ser capaz de utilizarlos para calcular ángulos, distancias y volúmenes.

Además de estos objetivos, se pretende transmitir un método de trabajo a los estudiantes y otorgarles herramientas que puedan utilizar en otros ámbitos. Así, en esta unidad didáctica también se plantean los siguientes objetivos.

- Utilizar programas informáticos (Geogebra) para visualizar los distintos problemas que se plantean, mejorando así su visión espacial.

- Descubrir las distintas posibilidades de solucionar un problema apoyándose en Geogebra.
- Experimentar con el Geogebra para conseguir solucionar las dudas que se plantean al enfrentarse a un problema o al entender la parte teórica de un tema, ya sea de geometría analítica o de cualquier otra parte de las matemáticas.
- Crear un problema de geometría analítica, sabiendo proporcionar los datos necesarios para solucionarlo.
- Alcanzar un alto nivel de interés hacia el aprendizaje de las matemáticas utilizando las nuevas tecnologías y la contextualización de problemas.

5.3. Competencias

En esta unidad didáctica se trabajan todas las competencias clave que define la LOMCE. Entre todas estas, hay algunas que se trabajan especialmente, que son las siguientes.

- Competencia matemática y competencias básicas en ciencias y tecnología, (CMCT). Evidentemente, al ser una unidad didáctica de la asignatura de Matemáticas II, se trabajará la competencia matemática a lo largo de toda la unidad.
- Competencia digital, (CD). En esta unidad es de vital importancia la competencia digital. Tanto el docente como los estudiantes utilizan el software Geogebra para ayudar a visualizar los diferentes ejercicios y a aprender conceptos de la unidad. Los estudiantes de hoy en día tienen un contacto casi permanente con las tecnologías, es muy importante que aprendan que estas tecnologías también pueden facilitar su aprendizaje.
- Competencia para Aprender a Aprender, (CPAA). Los estudiantes utilizan el Geogebra para experimentar con las herramientas matemáticas que se trabajan en esta unidad. Además, esta unidad acaba con un trabajo en grupo que deben realizar los estudiantes. Deben crear un problema de geometría analítica, parecido a los que se han visto en clase. Para ello, pueden crearlo desde el principio o modificar el enunciado o las preguntas de un problema existente. Para crear un problema de

matemáticas se debe tener un nivel muy alto de conocimiento de la materia, más que para resolverlos. Para realizar este trabajo los estudiantes deben ser conscientes de sus conocimientos y de sus posibles debilidades (fallos de concepto, falta de dominio de la parte teórica, etc.), por ello, es una actividad muy beneficiosa para los alumnos.

Aunque en menor grado, también están presentes las siguientes competencias clave en esta unidad didáctica.

- Competencia en comunicación lingüística, (CCL). En la unidad se propone que los alumnos creen un problema de geometría analítica que los estudiantes deben exponer al resto de la clase, trabajando su capacidad de comunicación oral. Además, es muy importante al crear un problema exponer un enunciado claro y conciso, en el que se entienda perfectamente el objetivo del problema, los datos y los diferentes componentes del mismo.
- Competencias sociales y cívicas, (CSC). En el trabajo en grupo que se manda en la unidad, los estudiantes deben interactuar y cooperar entre ellos para conseguir un buen trabajo en el que se vea reflejado el esfuerzo de todos los componentes.
- Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor, (SIE). Precisamente al crear tener que crear un problema los estudiantes se ven obligados a explotar su creatividad para conseguir el resultado deseado.
- Conciencia y expresiones culturales, (CEC). En la interactuación en el trabajo en grupo se juntan estudiantes con diferentes culturas, diferentes formas de pensar y diferentes formas de actuar. Con la meta de sacar un trabajo adelante deben cooperar y entenderse entre ellos respetando las ideas de cada uno. Además, después de la exposición de los trabajos en clase se hace un debate entre los estudiantes en el que se valoran tanto los trabajos de los demás grupos como el propio. Así, se formarán diferentes opiniones y los estudiantes deben respetar la libertad de expresión de los demás.

5.4. Contenidos

En esta unidad didáctica se trabajan varios contenidos; los siguientes son los que contempla el currículo de Bachillerato del BOR y son los contenidos puramente matemáticos.

- Operaciones con vectores (producto escalar, vectorial y mixto).
- Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.
- Posiciones relativas (incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos).
- Propiedades métricas (cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes).

Aparte de estos contenidos, también se van a trabajar otros más relacionados con las nuevas tecnologías para el estudio de las matemáticas y con la actitud de los estudiantes hacia ellas. Estos contenidos están relacionados con los objetivos que se pretenden alcanzar.

- Conocimiento y uso de Geogebra para solucionar problemas de geometría analítica. Las herramientas de Geogebra para crear planos, rectas, etc. y hallar distancias o intersectar objetos son muy sencillas de utilizar. El uso de las nuevas tecnologías para aprender matemáticas despierta un mayor interés de los alumnos hacia la asignatura.
- Estrategias para la creación de problemas: manipulación de las restricciones, de los objetivos, etc.
- Contextualización de problemas, en qué consiste y cómo puede ayudar a mejorar el aprendizaje.

5.5. Metodología

Con el fin de lograr los objetivos marcados, en esta unidad se propone una metodología constructiva y activa que atienda a la diversidad y fomente el aprendizaje significativo.

Las clases en las que se expliquen los conceptos puramente teóricos son clases magistrales en las que se hace especial hincapié en la importancia de que los estudiantes entiendan lo que se está explicando ya que en esta unidad existen muchas fórmulas para solucionar los ejercicios, pero no se pretende que los estudiantes aprendan estas fórmulas únicamente sin saber por qué se aplican y cuál es el fundamento teórico que hay detrás de ellas.

En las clases magistrales el docente lleva un porcentaje alto del peso de la clase pero eso no significa que los estudiantes tomen un papel totalmente pasivo, sino que es deseable que los alumnos participen en las clases, preguntando las posibles dudas que pueden tener y los conceptos que no les han quedado claros.

En muchas sesiones se solucionan problemas utilizando Geogebra y resolviendo también el problema en la pizarra. Muchos de estos problemas corresponden a ejercicios propuestos en las pruebas de acceso a la universidad ya que es interesante que los estudiantes se acostumbren al tipo de problemas que se van a encontrar en la Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU) y además, el interés de los estudiantes crece cuando se solucionan problemas de selectividad y por tanto, prestan más atención y mejora su aprendizaje.

Para favorecer la participación de los estudiantes, en alguna sesión se saca a estudiantes a la pizarra para solucionar el problema. Así, aparte de la intervención directa de alguno de los estudiantes, el docente también puede qué conceptos dominan los alumnos y cuáles les cuestan un poco más y así, puede reforzar estos últimos volviendo a explicar lo que sea necesario.

Al final de la unidad se propone un trabajo cooperativo. Se divide a los estudiantes en grupos y se le encarga la tarea de crear un problema de geometría analítica. Los trabajos colaborativos son clave para mejorar las relaciones sociales de los estudiantes, para que los alumnos aprendan a trabajar en equipo y tomen una participación más activa en su aprendizaje. Por eso, y pese a que en segundo de Bachiller el tiempo es limitado, se propone esta actividad.

Esta actividad en grupo resulta muy interesante por varios aspectos; es una actividad cooperativa en la que los estudiantes tendrán que ponerse de acuerdo para conseguir un buen trabajo, además deben crear un problema de geometría analítica y deben intentar contextualizarlo. La creación de problemas, como ya se ha explicado anteriormente es una actividad que requiere un alto dominio de la materia y por tanto es muy interesante para los estudiantes. Se fomenta el autoaprendizaje y se pretende que los estudiantes sean conscientes de sus conocimientos y de sus limitaciones ya que, al enfrentarte a la creación de un problema en vez de a solucionarlo, el proceso cognitivo que se sigue es distinto. Para crear el problema, se pueden ayudar de Geogebra y, por tanto, utilizan las nuevas tecnologías para aprender. Esto les puede motivar ya que están utilizando dispositivos que normalmente les dan un uso lúdico para aprender matemáticas. Otro atractivo de esta actividad que se propone es que deben intentar contextualizar el problema que han creado, es decir, buscar una situación que pudiera darse en la vida real que ejemplificase ese problema.

A lo largo de toda esta unidad didáctica está muy presente el uso de las TIC, se saca mucho partido del programa Geogebra ya que se utiliza para algunas explicaciones teóricas, para visualizar los distintos problemas que se solucionan en clase a lo largo de toda la unidad y también es utilizado por los alumnos al realizar el trabajo en grupo al final de la unidad. Este programa tiene una vista 3D que permite rotar las distintas construcciones y así, poder visualizar perfectamente todas los problemas.

Como se ha comentado en los objetivos, se pretende que los estudiantes sepan cómo utilizar las nuevas tecnologías para aprender. En Internet se puede acceder a muchísima información y a multitud programas que pueden ayudar a los estudiantes a formarse y, en esta unidad, se les va a enseñar a utilizar uno de ellos.

5.6. Temporalización

Esta unidad didáctica se imparte en nueve sesiones diferentes. En la siguiente tabla se resumen las actividades que se realizan en cada sesión.

Sesión 1	Recordatorio operaciones con vectores
Sesiones 2 y 3	Ecuaciones de la recta y del plano. Ejercicios.
Sesión 4	Posiciones relativas.
Sesión 5	Propiedades métricas: distancias, ángulos, áreas y volúmenes.
Sesiones 6 y 7	Ejercicios.
Sesión 8	Creación de problemas. Trabajo en grupo.
Sesión 9	Exposición trabajo en grupo

Sesión 1

En esta primera sesión de la unidad didáctica se van a recordar las operaciones con vectores: producto escalar, vectorial y mixto, haciendo especial hincapié en el significado geométrico de las distintas operaciones, que después ayudará a los estudiantes a solucionar los problemas; la intervención del ángulo de dos vectores mediante el producto escalar, el área del paralelogramo y el producto vectorial y el volumen del paralelepípedo y el producto mixto.

Se resuelven en clase, utilizando Geogebra, los ejercicios del Anexo 1.

Sesiones 2 y 3

En la segunda y la tercera sesión se van a estudiar las distintas ecuaciones de la recta y del plano. Los alumnos conocen las distintas ecuaciones de la recta, tan sólo hay que ver cómo cambian al estudiar problemas en tres dimensiones y no en dos. Se introduce el concepto de plano, cómo queda definido, las distintas ecuaciones, el vector normal, etc.

Para trabajar estos conceptos se resuelven en la pizarra los ejercicios del Anexo 2 y el ejercicio de la EBAU de la Comunidad Autónoma de La Rioja de junio del 2015, que está solucionado en el Anexo 3.

Sesión 4

En la cuarta sesión de esta unidad se van a explicar las posiciones relativas de dos rectas, de recta y plano y de dos planos. Para esta explicación se va a utilizar Geogebra para ayudar a visualizar las distintas posiciones.

Sesión 5

En esta quinta sesión se va a explicar la última parte de teoría de la unidad, las propiedades métricas: cálculo de distancias entre dos rectas, entre recta y plano paralelos, etc. cálculo de ángulos, cálculo de áreas y de volúmenes. En la primera sesión de la unidad se ha propuesto repasar las operaciones con vectores y su significado geométrico porque son esenciales para realizar correctamente todos los ejercicios de esta unidad y además ayudan a entender mejor esta última parte.

Sesiones 6 y 7

En estas sesiones se van a resolver múltiples ejercicios repasando toda la unidad. Se van a proponer también ejercicios de la EBAU de anteriores años ya que para los estudiantes es una motivación extra. Estos ejercicios se resolverán utilizando el método que se ha comentado anteriormente, resolviendo tanto en Geogebra como en la pizarra cada paso para ayudar a que los estudiantes visualicen el problema y comprueben que la solución es la misma en ambos sitios.

Se resuelven los ejercicios de la EBAU de la Comunidad Autónoma de La Rioja de julio del 2016, que se puede consultar en el Anexo 4, junio del 2016 (Anexo 5), julio del 2017 (Anexo 6) y julio del 2013 (Anexo 7).

Sesión 8

En la sesión 8 se resuelve en clase el ejercicio del Anexo 8. Después de resolver este ejercicio, se explica a los estudiantes las diferentes estrategias que se pueden utilizar para crear problemas (manipulación de restricciones, de objetivo, etc.). A partir del ejercicio original del Anexo 8, se crean dos problemas nuevos, también resueltos en este Anexo 8.

También se explica el concepto de contextualización de problemas y se pone el ejemplo que se encuentra en el Anexo 9.

Después de la explicación de creación y contextualización de problemas, se propone una actividad para que los estudiantes trabajen en casa. Se dividirá al aula en grupos de 4 o 5 integrantes y cada grupo deberá crear un ejercicio de geometría analítica, parecido a los que se han resuelto en clase en estas últimas sesiones. Para ello, podrán utilizar Geogebra para crear el problema que deseen y tendrán que ser capaces de dar los datos justos para que el problema pueda ser solucionado. Se les pide que el problema que plantean tenga al menos dos datos (dos rectas, recta y plano, etc.) y que planteen dos preguntas que se puedan solucionar con los datos dados en las que intervengan ambos datos. Para la entrega del trabajo se pide un archivo en PDF en el que se encuentre el enunciado del ejercicio y el archivo de Geogebra en el que se encuentre el problema planteado y solucionado.

La creación de un problema es una gran actividad para los estudiantes para que reflexionen sobre el objetivo del problema que quieren crear, los datos necesarios, qué información puede ser omitida ya que se puede obtener de alguna forma, etc. Por último, se pide a los estudiantes que piensen una situación real en la que se podría aplicar este problema, es decir, que lo contextualicen.

Sesiones 9 y 10

En estas dos últimas sesiones de la Unidad Didáctica se realizan las presentaciones del trabajo que se ha mandado en la sesión 8. Cada grupo tendrá 15 minutos para la presentación de su ejercicio, teniendo que participar todos los integrantes del grupo. Deben enunciar su problema, comentar la contextualización que han pensado del problema y, después de esto, solucionarlo en Geogebra y también en la pizarra. Después de la presentación del grupo, los demás estudiantes pueden preguntar dudas o realizar comentarios acerca de la presentación o del problema planteado por sus compañeros.

El docente evalúa el trabajo después de cada presentación siguiendo la rúbrica que se encuentra en el apartado evaluación.

5.7. Recursos

Para llevar a cabo correctamente el método de resolución de problemas de geometría analítica que se ha comentado se necesita un aula equipada con un ordenador, un proyector y una pizarra. Es deseable que se pueda visualizar simultáneamente la pizarra y el proyector.

Como recurso informático principal se usa Geogebra, un programa matemático en el que se pueden realizar todo tipo de construcciones geométricas y además, trabajar con funciones. La gran ventaja de Geogebra respecto de otros programas es la sencillez para usarlo y que gracias a la vista 3D, los problemas de geometría analítica se pueden reproducir fácilmente pudiendo rotar la vista para que la visualización del problema sea perfecta.

Los ejercicios que se van a solucionar a lo largo de toda la unidad son proporcionados por el docente, utilizando varios ejercicios recopilados de las pruebas de acceso a la universidad. Estos ejercicios son interesantes porque los estudiantes se familiarizan con la tipología de estas actividades y además sirven como reclamo de atención ya que, en segundo de Bachiller, los alumnos están muy pendientes de la EBAU y prestan especial atención en este tipo de ejercicios.

El trabajo en grupo propuesto se realiza en casa pero, al final de la sesión 8, se dividirá la clase en los distintos grupos que se han formado, organizando las mesas y sillas de la manera que haga falta, para que los estudiantes empiecen a organizarse y a pensar en cómo van a llevar a cabo esta actividad.

5.8. Atención a la diversidad

Con el método de trabajo que se ha explicado de ir trabajando con el Geogebra a la par que en la pizarra, se ayuda a que los estudiantes visualicen mejor el problema. Existen estudiantes que tienen una visión espacial realmente buena y, quizás, no necesitan esta medida para entender perfectamente los ejercicios de este tema. Sin embargo, existen alumnos con menos capacidad, o con una visión espacial menor, que tienen dificultades con esta unidad didáctica y, este método, les ayudará especialmente a ellos. Por ello, es una buena medida para atender a la diversidad y para intentar que todos los estudiantes sean capaces de entender bien este tema y de comprender los diferentes ejercicios.

Además de esta atención a la diversidad a los estudiantes con menos capacidades o habilidades, también se propone en esta unidad didáctica un ejercicio de creación de problemas que, aunque lo tienen que hacer todos los estudiantes, aquellos con mayores capacidades son los que más provecho sacan de este ejercicio. Para crear un problema se necesita una buena comprensión del contenido y presenta más dificultad que solucionar problemas. Por ello, para los estudiantes con capacidades intelectuales altas es un reto más difícil y lo pueden encontrar más atractivo.

5.9. Evaluación

Los siguientes criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables son los contemplados en el Boletín Oficial de la Rioja (BOR), Decreto 21/2015 por el que se establece el currículo de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de La Rioja.

<u>Criterios de evaluación</u>

1. Resolver problemas geométricos espaciales, utilizando vectores.

2. Resolver problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos utilizando las distintas ecuaciones de la recta y del plano en el espacio.

3. Utilizar los distintos productos entre vectores para calcular ángulos, distancias, áreas y volúmenes, calculando su valor y teniendo en cuenta su significado geométrico.

Estándares de aprendizaje evaluables

1.1. Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal.

2.1. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas.

2.2. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente.

2.3. Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos.

2.4. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

3.1. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.

3.2. Conoce el producto mixto de tres vectores, su significado geométrico, su expresión analítica y propiedades.

3.3. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

3.4. Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos para seleccionar y estudiar situaciones nuevas de la geometría relativas a objetos como la esfera.

Para comprobar que los estudiantes dominan los contenidos que se enseñan en esta unidad didáctica se realiza una prueba de evaluación compuesta de varios ejercicios del mismo nivel que los que se han resuelto en clase durante una hora de clase. Esta prueba de evaluación se evalúa sobre 10 puntos y conforma el 75% de la nota de la unidad didáctica; se utilizan los criterios y estándares de evaluación que se han listado anteriormente para evaluar esta prueba. La prueba se encuentra en el Anexo 9.

El restante 25% se divide entre el trabajo cooperativo (20%) y el comportamiento y actitud en clase (5%). Para poder evaluar esto, se utiliza la siguiente rúbrica.

<table>
<tr><th colspan="2">Criterios</th><th>Necesita mejorar (0-1)</th><th>Regular (2-3)</th><th>Bien (4)</th><th>Excelente (5)</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Trabajo cooperativo</td><td>Planteamiento del problema (5%)</td><td>El problema que plantea el grupo está lleno de errores y no tiene sentido matemático.</td><td>Falta algún dato para poder solucionar el problema que ha planteado el grupo.</td><td>El problema se puede solucionar pero algún dato es innecesario.</td><td>El problema que plantea el grupo se puede solucionar y han dado los datos justos y necesarios para ello.</td></tr>
<tr><td>Uso de Geogebra (5%)</td><td>El grupo no ha construido el programa en Geogebra.</td><td>El grupo ha iniciado la construcción del problema en Geogebra pero no la han terminado.</td><td>La construcción del problema en Geogebra está acabada salvo algún elemento final que no han sabido obtener.</td><td>La construcción del problema creado en Geogebra es muy buena, todos los elementos del problema están presentes.</td></tr>
<tr><td>Contextualización del problema (5%)</td><td>El grupo no ha contextualizado el problema.</td><td>El grupo ha propuesto una idea de contextualización pero no han sabido llevarla a cabo.</td><td>El grupo ha propuesto una idea de contextualización, la han llevado a cabo pero el problema no acaba de tener sentido lógico.</td><td>El grupo ha conseguido una buena contextualización del problema, con sentido físico y matemático.</td></tr>
<tr><td>Exposición del trabajo (5%)</td><td>La exposición del trabajo ha sido deficiente, no estaba preparada.</td><td>La exposición del trabajo no ha sido mala pero ha habido varias interrupciones y momentos donde no sabían cómo continuar.</td><td>La exposición del trabajo ha sido buena, pero algún miembro del grupo no tenía muy claro el trabajo y ha habido algunas interrupciones.</td><td>La exposición del trabajo ha sido muy buena, todos los integrantes han participado y han defendido el trabajo correctamente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Comportamiento y actitud en clase (5%)</td><td>No proporciona ideas en clase y muestra un interés escaso.</td><td>Rara vez participa en clase y muestra un cierto interés hacia la asignatura.</td><td>Participa en clase y suele mostrar interés hacia la asignatura.</td><td>Muestra un gran interés hacia la asignatura y participa bastante en las diferentes sesiones.</td></tr>
</table>

6. DISCUSIÓN

Este proyecto se ha diseñado para ayudar a los estudiantes de 2º de Bachillerato en un curso complicado, exigente y lleno de contenidos. Al final de este curso los estudiantes se enfrentan a unos exámenes que determinarán el futuro de muchos de ellos. Por lo tanto, este curso normalmente se enfoca a realizar correctamente estos exámenes y a preparar a los estudiantes lo mejor posible para estos exámenes. Lo cierto es que, en muchas ocasiones, se prepara muy bien a los estudiantes para solucionar ejercicios tipo pero, en el fondo, no dominan la materia ni la llegan a comprender correctamente. Puede ocurrir y, de hecho, ocurre, que alumnos o alumnas con una buena nota en matemáticas en Bachillerato y en la EBAU no sepan solucionar ejercicios más allá de los típicos que entran en estas pruebas de acceso a la Universidad. Con este trabajo se pretende que los estudiantes comprendan correctamente esta parte de geometría analítica, sepan por qué se hacen las cosas, de dónde vienen las fórmulas, los significados geométricos que tienen, etc. Así, se pretende que los alumnos alcancen un buen nivel de esta parte de la asignatura y que, además, estén lo suficientemente preparados para enfrentarse a la selectividad ya que, normalmente siempre se pregunta un ejercicio de esta parte y, si los estudiantes la dominan, pueden partir con una buena ventaja en este examen.

Uno de los principales contratiempos de este proyecto es el tiempo disponible en este curso. El temario de la asignatura de Matemáticas II es muy extenso, y en segundo de Bachillerato las clases acaban muy pronto. Hay centros que destinan un par de semanas para preparar la EBAU, que es a principios del mes de junio, y contando que hay que hacer exámenes de la última evaluación y exámenes finales, prácticamente las clases se acaban a principios del mes de mayo. Por lo tanto, el tiempo para explicar un temario tan extenso es bastante reducido. Con este método de resolución de problemas que se ha propuesto, en el que se utiliza Geogebra para solucionar los ejercicios propuestos a la vez que se solucionan en la pizarra, se consume un mayor tiempo por ejercicio. Sin embargo, la mejora en la calidad de la explicación de este ejercicio es lo bastante grande para que compense este tiempo extra que se consume. Sobre todo, ayuda a los estudiantes que les cuesta más este tema porque no tienen una visión espacial demasiado buena que les permita visualizar perfectamente los ejercicios sin necesidad de Geogebra u otra ayuda. Por tanto, los beneficios de utilizar este método compensan el tiempo extra que se le añade a esta unidad.

Otro inconveniente que puede aparecer es que no se tomen realmente en serio utilizar un programa como Geogebra para estudiar. Los alumnos están acostumbrados a ser evaluados con métodos tradicionales, con exámenes que hay que solucionar con bolígrafo y un papel y todo lo que se desvía de eso, parece que no es tan importante. Este es uno de los motivos por los que se resuelve paso a paso los ejercicios, primero en Geogebra y después en la pizarra, para que los estudiantes sean conscientes de que se llegan a los mismos resultados, de que Geogebra (u otros programas parecidos) pueden ayudarles mucho en su aprendizaje. De hecho, en muchas carreras universitarias (ingenierías, matemáticas, etc.) se debe aprender a trabajar en varios programas informáticos: Mathematica, MatLab, Java, etc. Además, hoy en día, en muchas ofertas de trabajo se requiere el dominio de algún programa informático. Por este motivo, es bueno que los estudiantes se acostumbren a utilizar el ordenador, el móvil y otros dispositivos para aprender y para solucionar problemas que se les plantean en su vida académica.

Este método de resolución de ejercicios que se ha propuesto podría mejorarse si, a la vez que el docente soluciona el problema en Geogebra, cada estudiante pudiera hacer lo mismo con su móvil y la aplicación de Geogebra. Así, manipulando el propio estudiante el programa, visualizarían mejor el ejercicio y aprenderían más del propio programa. Sin embargo, no se ha expuesto esta propuesta en el trabajo, ya que en la gran mayoría de los centro no está permitido el teléfono móvil. Es comprensible que esto sea así, ya que los estudiantes seguramente intentarían utilizar el móvil para otros fines: comunicarse entre ellos, vídeos, fotos, etc. Hoy en día es muy difícil que en un aula se permita el uso del móvil y esto no conlleve problemas. Sin embargo, creo que en un futuro se deberá convivir con esta situación, ya que el móvil (o un iPad, Tablet, etc.) son herramientas muy potentes que pueden ayudar al desarrollo académico de los estudiantes y no se les saca el provecho que se podría sacar por miedo a un mal uso de estas herramientas por parte de los estudiantes. Con el tiempo, y si desde pequeños se educa a los alumnos para que comprendan el potencial de estas herramientas y sean capaces de utilizarlas correctamente en el aula, se podrán proponer este tipo de soluciones.

En relación a lo que se ha comentado en el último párrafo, es difícil que la manera de enseñar de los docentes cambie (por ejemplo, enseñando programas matemáticos como Geogebra o similares) cuando los exámenes siguen siendo del mismo estilo que hace unas décadas. Aún más en Bachiller, donde, al acabar la etapa, los estudiantes se enfrentan a unos exámenes de acceso a la universidad que siguen teniendo el mismo estilo de siempre. Por lo tanto, los profesores tienen que preparar a sus estudiantes para que sean capaces de aprobar estos exámenes, con lo cual es complicado salirse del temario y enseñar a los alumnos otras herramientas.

El cambio en las escuelas y los centros educativos es progresivo, no puede llegar de un día para otro. La enseñanza ha evolucionado mucho en las últimas décadas y, aunque en algunos aspectos sigue pareciéndose a la enseñanza de antes de la era digital, progresivamente se va adaptando a las nuevas tecnologías y nuevos estilos de vida.

7. CONCLUSIÓN

En este proyecto de innovación, se ha propuesto un método de resolución de problemas en las aulas en el que se utiliza un soporte informático para mejorar la calidad de la enseñanza. Desde un punto de vista más personal, creo que es un método que puede ayudar a muchos estudiantes. Bajo mi experiencia, 2º de Bachillerato es un curso en el que el tiempo paso muy rápido, los profesores tienen que dar una cantidad abultadísima de contenidos a los estudiantes en un tiempo reducido. Esto provoca que los estudiantes apenas pueden asimilar un tema cuando ya prácticamente se empieza el siguiente. Particularmente, el cambio en este curso al estudiar Geometría Analítica es bastante fuerte, ya que se trabaja en 3 dimensiones, aparecen planos, las ecuaciones de la recta se vuelven más complicadas, hay que estudiar distancias, posiciones relativas, etc. En este tema existen multitud de fórmulas y, muchas veces, se utilizan sin saber muy bien el cómo ni el por qué. A mí personalmente me costó bastante este tema hasta que comencé a visualizar los problemas, dibujando los planos, rectas, vectores, etc. que estuvieran implicados en el problema. Geogebra es una herramienta muy sencilla de utilizar y manipular, y las construcciones de este tipo de problemas son muy sencillas y ayuda muchísimo a entender por qué se utiliza una determinada fórmula, o por qué el vector director de la recta se utiliza para obtener la ecuación general de un plano, etc. Principalmente por este motivo creo que puede ser un método válido para ser utilizado en clase, en este caso en 2º de Bachillerato en la parte de Geometría Analítica, pero puede ser extrapolable a otros cursos y a otras partes de las matemáticas.

Dentro de la Unidad Didáctica se propone una actividad en grupo en la que cada grupo debe crear y contextualizar un problema de geometría analítica. Esta actividad requiere de un dominio mayor de la materia y hace que el estudiante sea consciente del nivel de conocimientos que tiene. Personalmente creo que es una actividad que no se suele plantear en las clases de matemáticas y que es interesante para todos los alumnos y, más especialmente para aquellos estudiantes con altas capacidades que quizá encuentren un reto mayor creando un problema que solucionándolo.

El uso de la tecnología en las clases cada vez más es una realidad. En este trabajo la tecnología, en concreto el programa Geogebra, es una pieza fundamental de la que se saca mucho partido. Creo que es importante inculcar a los adolescentes la idea de que con la tecnología (con el móvil, con el ordenador, etc.) también se puede aprender utilizando diferentes programas y recursos que existen en Internet. Personalmente pienso que estamos avanzando hacia una educación donde las tecnologías tendrán una gran relevancia en el proceso enseñanza-aprendizaje. Hoy en día, los estudiantes desde que son niños utilizan la tecnología como ocio y como instrumento para comunicarse, el reto es concienciar y enseñar a los niños y adolescente cómo usar la tecnología como instrumento para aprender.

Para poder ayudar a los estudiantes y darles herramientas y recursos actuales, los docentes deben intentar seguir formándose cada año, aprendiendo nuevas herramientas, nuevas técnicas, etc. Pienso que, como en casi todo en la vida, en la docencia no se puede vivir ajeno a los cambios que suceden en la sociedad, sino que hay que intentar renovarse para ofrecer a los estudiantes la mejor educación posible.

Para finalizar, quiero hacer una reflexión personal del curso de 2º de Bachillerato. Yo realicé las prácticas del Máster de Profesorado en un centro de educación secundaria y mi tutor impartía clases en Bachillerato. En este centro, como en muchísimos otros, las últimas semanas antes de las pruebas de acceso a la universidad las dedican para preparar estos exámenes. Antes de estas semanas, se deben realizar los exámenes de la tercera evaluación y otros exámenes finales. Por lo tanto, las clases se deben terminar prácticamente para finales de abril. Para entonces, se debe haber impartido todo el temario de la asignatura de Matemáticas II, que es realmente extenso. Además, este temario se ha visto incrementado en este último año ya que han introducido una parte de estadística que antes no se daba. La inclusión de estos temas me parece positiva ya que prácticamente en todas las carreras de ciencias se estudia algo de estadística y me parece bien que se enseñe una base de estadística en 2º de Bachillerato. Pero sinceramente creo que de algún sitio hay que recortar algo del temario porque tanto los docentes como los estudiantes sufren para acabar el temario en tiempo con la presión añadida de que, al finalizar el curso, se deben enfrentar a unos exámenes que, en muchos casos, definirán su futuro más inmediato.

8. REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). Funciones: Visualización y pensamiento matemático. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/261363726_Funciones_Visualizacion_y_pensamiento_matematico

Decreto 21/2015, de 26 de junio, por el que se establece el currículo de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de La Rioja. Boletín Oficial de La Rioja (BOR).

Descartes, R. (1637). Discurso del Método.

Fernández Bravo, J.A. y Barbarán Sánchez, J.J. (2015). Inventar problemas para desarrollar la competencia matemática.

Fidalgo, A. (2016). Metodologías. Lección magistral: Qué es y cómo mejorarla. Recuperado de https://innovacioneducativa.wordpress.com/2016/04/07/metodologias-leccion-magistral-que-es-y-como-mejorarla/

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/7351/

Iranzo, N. y Fortuny, J.M. (2009). La influencia conjunta del uso de Geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. Recuperado de https://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/142075/332857

Lavicza, Z. (2011). Hystory of Geogebra. Recuperado de https://community.geogebra.org/it/wp-content/uploads/sites/8/2013/06/Lavicza-Torino-GGday-2011.pdf

Linares Garriga, J.E. (s.f.). El aprendizaje cooperativo. Recuperado de http://www.um.es/eespecial/inclusion/docs/AprenCoop.pdf

Malaspina, U. (2016). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/9417/1/Creacion2016Malaspina.pdf

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. Boletín Oficial del Estado (BOE).

Rajasree, G., Varsha, K, Susmitha, E., Praveena, J., y Harika, G. (2013). Augmented Reality on Android Platform. Recuperado de https://www.ijser.org/researchpaper/AugmentedReality-on-Android-Platform.pdf

Sánchez, J. (2002). Integración Curricular de las TICs: Conceptos e Ideas. Recuperado de http://www.c5.cl/mici/pag/papers/inegr_curr.pdf

Schilardi, A. (2014). Estilos de Aprendizaje. Importancia de la visualización en la geometría. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/10414/1/Schilardi2014Estilos.pdf

9. ANEXOS

Anexo 1. Ejercicios vectores

1. Dados los vectores $\overline{u} = 3\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$ y $\overline{v} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}$, halla:

i)El producto vectorial de $\overline{u}$ y $\overline{v}$.
ii)El vector unitario ortogonal a $\overline{u}$ y $\overline{v}$.
iii)El área del paralelogramo que tiene por lados $\overline{u}$ y $\overline{v}$.

En Geogebra, después de introducir los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$, se obtiene el vector $\overline{w}$ utilizando la herramienta *'Producto vectorial'*. El resultado es el vector $\overline{w}$, en verde en la imagen anterior y que, como se puede apreciar en la captura, es perpendicular a los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$. Con esto se ha solucionado el primer apartado del ejercicio. El resultado es $\overline{w} = (7, -14, 7)$.

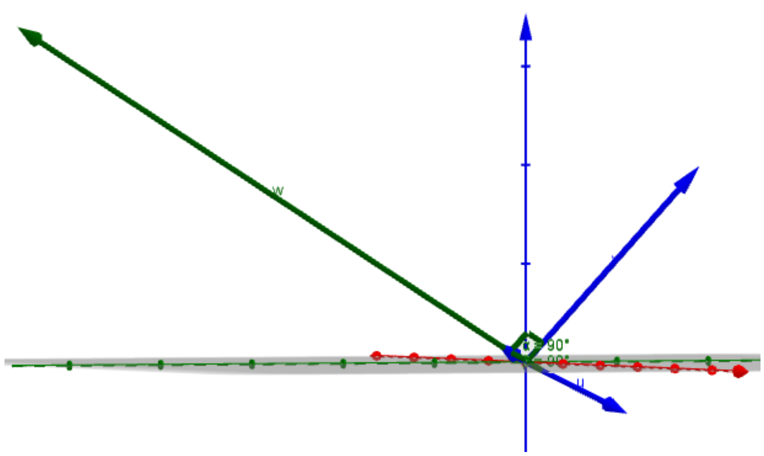

Figura 1: $\overline{w}$, producto vectorial de $\overline{u}$ y $\overline{v}$.

Para realizar el producto vectorial a mano, se debe realizar el siguiente determinante.

$$\overline{w} = \overline{u} \times \overline{v} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7\overline{i} - 14\overline{j} + 7\overline{k}$$

El segundo apartado pide un vector unitario ortogonal a $\overline{u}$ y $\overline{v}$. Para que sea perpendicular a estos vectores, debe seguir la dirección y sentido del vector $\overline{w}$. Para obtener este vector, tan sólo hay que dividir $\overline{w}$ por su módulo.

$$|\overline{w}| = \sqrt{7^2 + (-14^2) + 7^2} = \sqrt{294}$$

Por lo tanto el vector unitario, $\overline{w_u}$, será:

$$\overline{w_u} = \left(\frac{7}{\sqrt{294}}, \frac{-14}{\sqrt{294}}, \frac{7}{\sqrt{294}}\right)$$

El tercer apartado pide el área del paralelogramo que tiene por lados $\overline{u}$ y $\overline{v}$. El área es el módulo del producto vectorial luego $A = |\overline{w}| = \sqrt{294}$. En Geogebra, se forma este paralelogramo y se observa que, efectivamente, el área es 17,15 $\approx \sqrt{294}$.

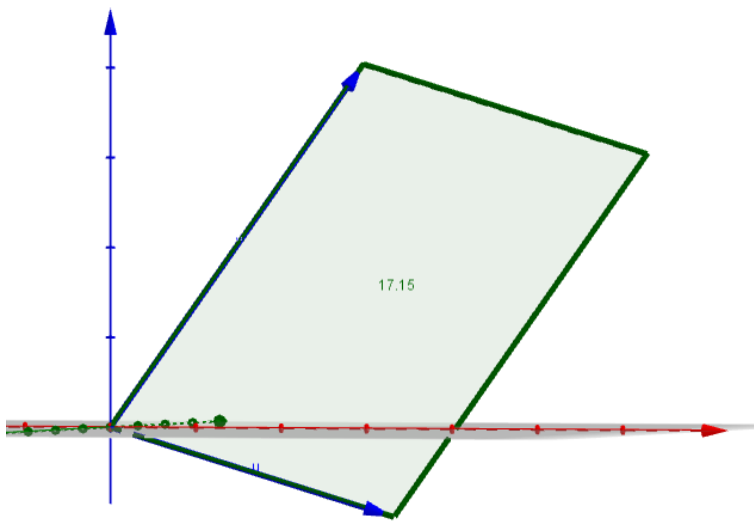

Figura 2: *Área del paralelogramo formado por* $\overline{u}$ *y* $\overline{v}$*.*

2. Dados los vectores $\overline{u} = (1, 2, 3)$, $\overline{v} = (2, 1, 3)$ y $\overline{w} = (-1, -1, 0)$, calcula el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas estos vectores.

Al dar teoría se ha comentado que el volumen de un paralelepípedo que tiene por aristas tres vectores viene dado por módulo del producto mixto de dichos vectores. Se va a aprovechar Geogebra para dibujar este paralelepípedo y ver su volumen.

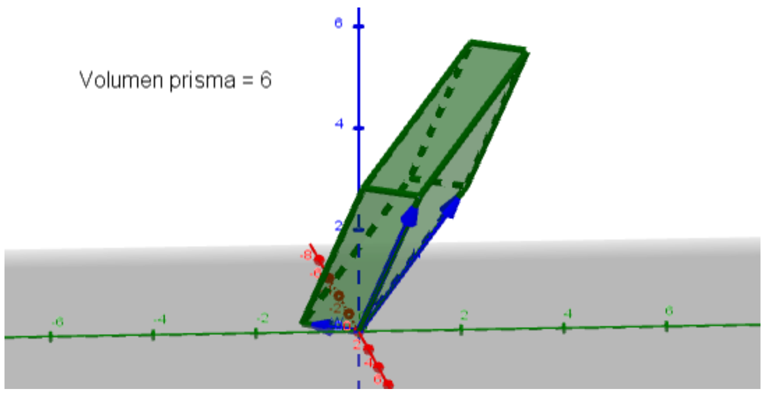

Figura 3: *Paralelepípedo formado por por $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$.*

Para obtener este volumen con las herramientas que se enseñan en este curso, como ya se ha comentado, hay que obtener el producto mixto de estos tres vectores.

$$(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6 - 6 + 3 + 3 = -6$$

El módulo del producto mixto y, por tanto, el volumen del paralelepípedo es 6. Como no puede ser de otra manera, coincide con el resultado dado por Geogebra.

3. Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1, 0, 0)$ y $B(0, 1, 0)$. El centro del paralelogramo es $O(0, 0, 1)$. Halla las coordenadas de los vértices restantes.

En Geogebra es sencillo el planteamiento de este problema. Después de representar los puntos A, B y O, se construyen los vectores $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$. El punto C se halla sumando a O el vector $\overline{AO}$, $C = O + \overline{AO}$. De la misma manera $D = O + \overline{BO}$. Ya se han obtenido los dos vértices restantes.

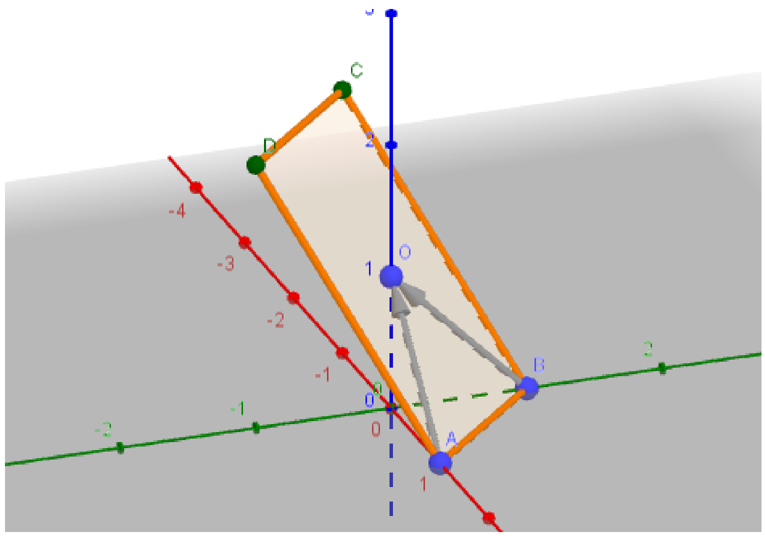

Figura 4: *Paralelogramo formado por A, B, C y D.*

Para solucionar este ejercicio en la pizarra, se debe tener en cuenta que C es el simétrico de A respecto a O, y D el simétrico de B respecto a O. Por lo tanto, si $C(c_1, c_2, c_3)$ y $D(d_1, d_2, d_3)$, se puede escribir que:

$$\begin{cases} \frac{c_1+1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -1 \\ \\ \frac{c_2+0}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0 \\ \\ \frac{c_3+0}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d_1+0}{2} = 0 & \Rightarrow \quad d_1 = 0 \\ \\ \frac{d_2+1}{2} = 0 & \Rightarrow \quad d_2 = -1 \\ \\ \frac{d_3+0}{2} = 1 & \Rightarrow \quad d_3 = 2 \end{cases}$$

Por lo tanto $C(-1, 0, 2)$ y $D(0, -1, 2)$.

Anexo 2. Ejercicios de ecuaciones de rectas y planos

1. Obtener la ecuación de la recta que es paralela a los planos $\pi_1 \equiv x + 10y + z = 82$ y $\pi_2 \equiv -x + 2y + z = 22$, y pasa por el punto $P(2, 4, -1)$.

Para representar un plano en Geogebra, se debe obtener un punto y el vector normal al plano. En este caso, $P_1(82, 0, 0)$, $\overline{v_1} = (1, 10, 1)$ y $P_2(0, 0, 22)$, $\overline{v_2} = (-1, 2, 1)$. Se puede observar que estos dos planos, se cortan en una recta. Por lo tanto, la recta r paralela a los dos planos, debe ser paralela a esta recta intersección de los dos planos. Para obtenerla, se usa la herramienta de Geogebra *'Recta(<Punto>,<Recta paralela>)'*, seleccionando como punto $P(2, 4, -1)$ y como recta la intersección de los dos planos.

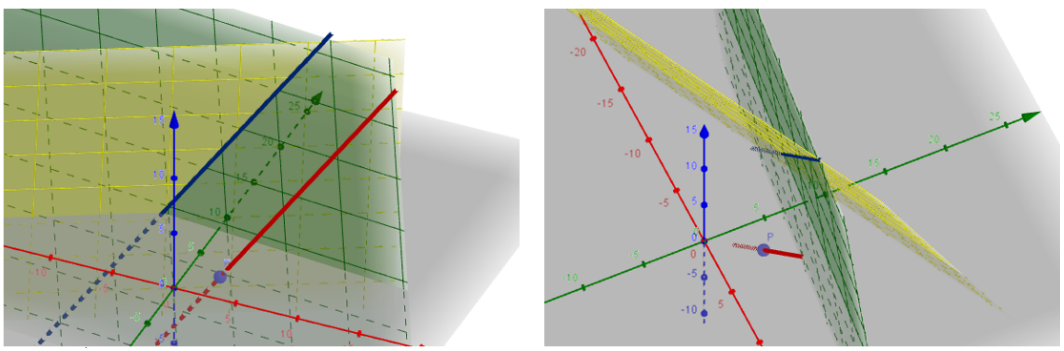

Figura 1: *Recta r paralela a los planos π_1 y π_2.*

Para hallar la ecuación de esta recta con las herramientas que se aprenden en este curso de 2º de Bachillerato, primero se debe obtener el vector director. Como el enunciado da las ecuaciones generales de los planos, se pueden obtener los vectores normales a dichos planos; $\overline{v_1} = (1, 10, 1)$ y $\overline{v_2} = (-1, 2, 1)$.

El producto vectorial de estos dos vectores da un vector que es director de la recta que se busca. Para que se entienda esta idea, se muestra en Geogebra la construcción de estos vectores.

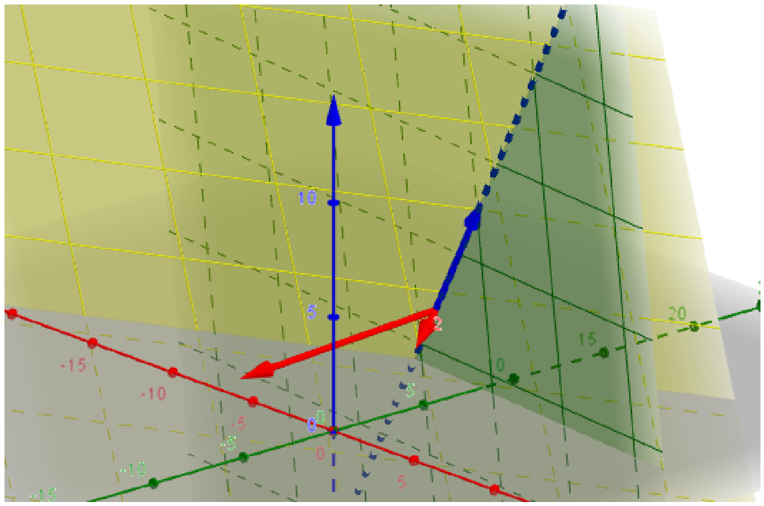

Figura 2: *Vectores normales a los planos (en rojo) y su producto vectorial (en azul).*

Por lo tanto, se calcula el producto vectorial de $\overline{v_1} = (1, 10, 1)$ y $\overline{v_2} = (-1, 2, 1)$.

$$\overline{u} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 10 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8\overline{i} - 2\overline{j} + 12\overline{k}$$

Por lo tanto, la recta r pasa por $P(2, 4, -1)$ y tiene como vector director $\overline{u} = (4, -1, 6)$, simplificando el vector hallado anteriormente. Las ecuaciones paramétricas de la recta son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 6t \end{cases}$$

2. Halla las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que tiene como vectores directores $\overline{u} = (1, -1, 1)$ y $\overline{v} = (2, 3, 1)$ y pasa por el punto $A(1, 1, 1)$.

Para solucionar este problema en Geogebra se introducen el punto A y los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$. Se va a utilizar la herramienta *'Plano(<Punto>,<Punto>,<Punto>)'*. Para ello, se deben obtener dos puntos más por los que pase el plano. Se hallan $B = A + \overline{u}$ y $C = A + \overline{v}$. Con estos datos se puede representar el plano, Geogebra da como resultado la ecuación general, $\pi \equiv -2x + 3y + 5z = 6$.

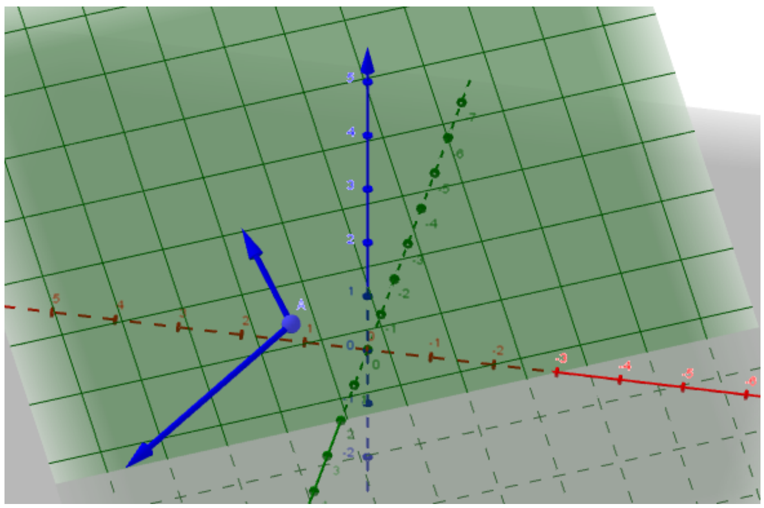

Figura 3: *Plano π que contiene a A y tiene como vectores directores $\overline{u}$ y $\overline{v}$.*

Para solucionar este ejercicio en la pizarra, primero se obtienen las ecuaciones paramétricas, que son inmediatas.

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t + 2s \\ \\ y = 1 - t + 3s \\ \\ z = 1 + t - s \end{cases}$$

Para obtener la ecuación general del plano se necesita un vector normal al plano. Como se tienen dos vectores directores, el vector normal se obtiene calculando el producto vectorial de los dos vectores directores.

$$\overline{w} = \overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2\overline{i} + 3\overline{j} + 5\overline{k}$$

Por lo tanto, la ecuación general del plano será $-2x + 3y + 5z + D = 0$. Para obtener el valor de D, se debe hacer que el plano pase por el punto $A(1, 1, 1)$.

$$-2 + 3 + 5 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -6$$

Entonces, la ecuación general del plano es $-2x+3y+5z-6 = 0$. Como no puede ser de otra manera, coincide con el resultado ofrecido por Geogebra.

3. Halla el plano que pasa por la intersección de la recta r y el plano $\pi \equiv x + y - z = 0$ y es paralelo al plano $\pi' \equiv x + 2y + 3z - 3 = 0$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 3t \\ z = 2 \end{cases}$$

Para solucionar este ejercicio en Geogebra, lo primero es representar el plano π y la recta r. Para representar el plano se necesita un punto y un vector normal. Se usa el punto $O(0,0,0)$ y el vector $\overline{v_\pi} = (1,1,-1)$. Para representar la recta, se toma el punto $P_r(3,4,2)$ y el vector director $\overline{v_r} = (2,3,0)$. Una vez se han representado estos dos objetos, se obtiene el punto P, intersección de la recta y el plano. Para ello se usa la herramienta de Geogebra *Ínterseca(<Objeto>,<Objeto>)'*. El resultado es el punto $P(1,1,2)$.

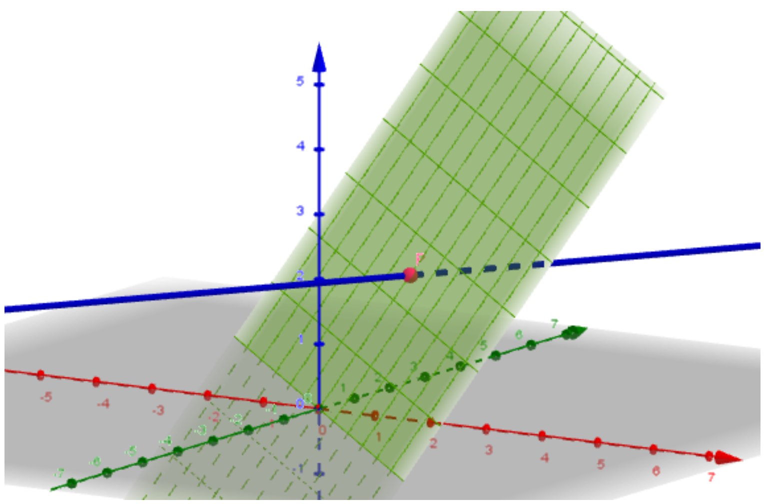

Figura 4: *Plano π, recta r y punto de intersección, P.*

Para obtener este punto en la pizarra, se sustituyen las ecuaciones paramétricas de la recta r en la ecuación general del plano π.

$$3 + 2t + 4 + 3t - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -1$$

$$P \begin{cases} x = 3 - 2 = 1 \\ \\ y = 4 - 3 = 1 \\ \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad P(1,1,2)$$

Ya se tienen las coordenadas del punto por el que debe de pasar el plano que se busca, α. Se sabe también que es paralelo al plano $\pi' \equiv x + 2y + 3z - 3 = 0$. Para dibujar este plano en Geogebra, como siempre, se necesita el vector normal y un punto. Se coge el punto $C = (0,0,1)$, y el vector director $\overline{w} = (1,2,3)$. Como el plano α es paralelo a este plano π', el vector normal será el mismo. Por lo tanto se puede representar ya el plano α, con el punto P y el vector $\overline{w}$.

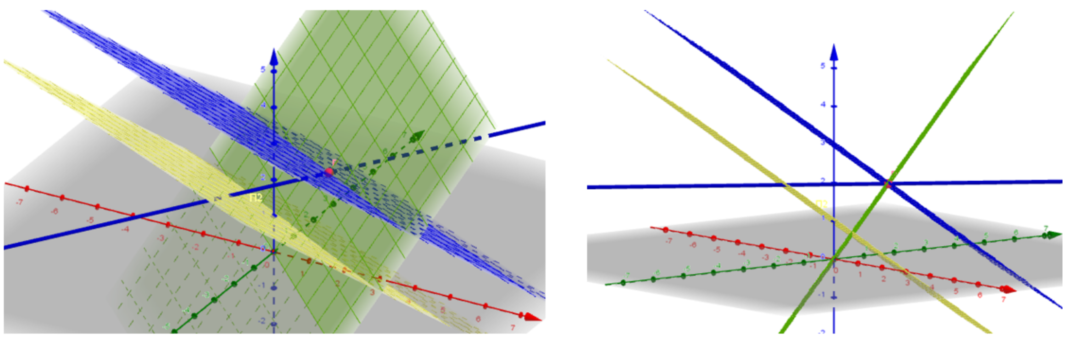

Figura 5: *Plano α, paralelo a π' y que pasa por P.*

Para obtener la ecuación de este plano α sin utilizar Geogebra, se debe conocer un punto y un vector normal al plano. Se ha obtenido antes que pasa por el punto $P(1,1,2)$. Se sabe que α es paralelo al plano $\pi' \equiv x+2y+3z-3 = 0$. Por lo tanto, el vector normal al plano π', también será un vector normal al plano α. Así pues, con este vector $\overline{w} = (1,2,3)$ y con el punto P se puede obtener la ecuación de α.

La ecuación del plano α es del tipo:

$$\alpha \equiv x + 2y + 3z + D = 0$$

Haciendo que el plano contenga al punto $P(1,1,2)$.

$$1 + 2 + 6 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -9$$

Por lo tanto, la ecuación del plano buscado es $\alpha \equiv x + 2y + 3z - 9 = 0$.

Anexo 3. EBAU Rioja Junio 2015

4.– (3 puntos) Consideremos el punto $P(6,-1,5)$ y la recta

$$r:\begin{cases} x = 5+t, \\ y = -t, \\ z = 1-2t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Halla la ecuación del plano, π, perpendicular a r que contiene a P.

(ii) Determina el punto Q donde la recta r corta al plano π.

(iii) Determina el punto S simétrico de P respecto a la recta r.

Se plantea este ejercicio en el aula para resolverlo simultáneamente en la pizarra y en Geogebra para ayudar a los estudiantes a visualizar mejor el problema.

En el se proporciona el punto $P(6,-1,5)$ y la recta r en sus ecuaciones paramétricas. Para introducir esta recta en Geogebra se obtiene un punto que pertenece a ella y su vector director. En este caso, $P_r = (5,0,1)$ y el vector director $u_r = (1,-1,-2)$. La recta se introduce en Geogebra utilizando la herramienta *‘Recta(<Punto>,<Vector director>)’*.

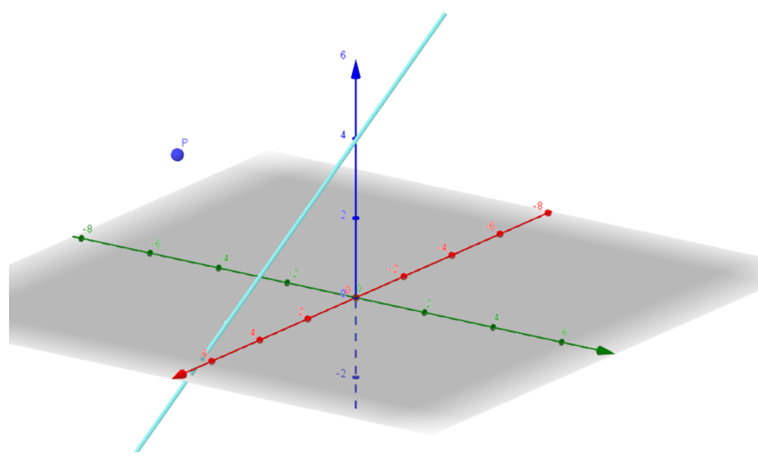

Figura 1: *Representación del punto P y recta r.*

En el primer apartado, se pide la ecuación del plano π, perpendicular a r y que contiene al punto P. Primero, se soluciona en Geogebra, para ello, tan sólo se tiene que usar la herramienta *'PlanoPerpendicular (<Punto>,<Vector>)'*. Como punto, se usa el punto P ya que el plano lo debe contener y como vector se usa el vector director de la recta u_r ya que, como el plano es perpendicular a la recta, el vector normal del plano coincide con el vector director de la recta. Aparte del resultado visual, Geogebra da la ecuación del plano, que es la siguiente

$$\pi \equiv x - y - 2z = -3.$$

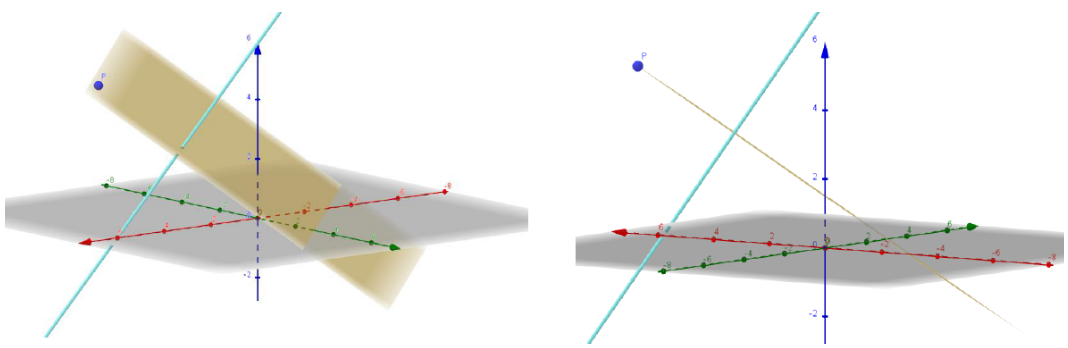

Figura 2: *Representación del plano π perpendicular a r y que contiene a P.*

Una vez que se ha solucionado este primer apartado en Geogebra, se procede a resolverlo en la pizarra. Ya se ha comentado que el vector normal del plano es el vector director de la recta, por tanto la ecuación del plano será del tipo

$$x - y - 2z + D = 0.$$

Para que el plano contenga al punto $P(6, -1, 5)$, se debe sustituir sus coordenadas en la ecuación del plano y obtener el parámetro D que hace que se cumpla la ecuación. Se obtiene $D = 3$ y por tanto la ecuación del plano es

$$x - y - 2z + 3 = 0.$$

Esta ecuación, evidentemente, coincide con el resultado de Geogebra.

En el segundo apartado del ejercicio se pide el punto Q de intersección de la recta r y el plano π. Para obtener este punto en Geogebra tan solo hay que usar la herramienta *Ínterseca (<Objeto>,<Objeto>)'*, siendo la recta y el plano estos objetos. El resultado es el punto Q(4,1,3).

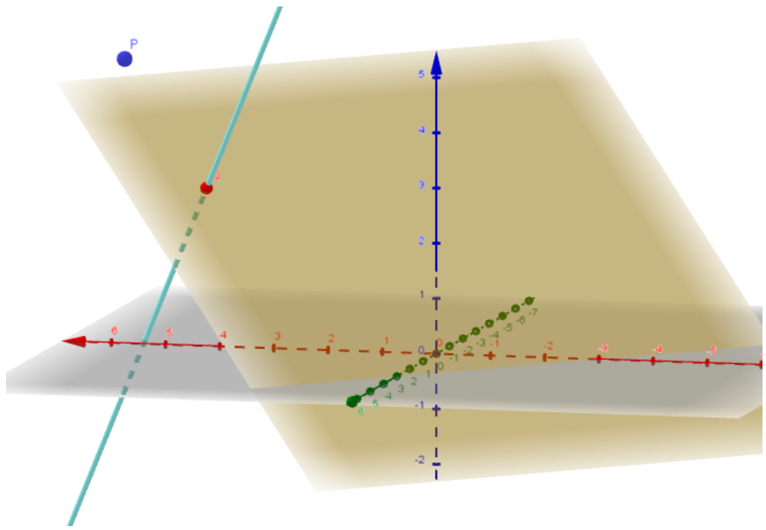

Figura 3: *Obtención del punto Q, intersección de la recta r y el plano π.*

Para obtener las coordenadas de este punto utilizando las herramientas que se aprenden en esta unidad didáctica se debe sustituir en la ecuación general del plano las ecuaciones paramétricas de la recta, que son las que proporciona el enunciado del ejercicio.

$$5 + t - (-t) - 2(1 - 2t) = -3 \quad \Rightarrow \quad t = -3$$

Sustituyendo este valor de t en las ecuaciones paramétricas se obtienen las coordenadas del punto Q(4,1,3).

En el último apartado del problema se pide el punto S, simétrico de P respecto de la recta r. Como el punto Q se ha obtenido intersectando la recta r con el plano π perpendicular a la r que pasa por P, precisamente es el punto medio de P y S. Para hallar las coordenadas en Geogebra de este punto S, se crea el vector $\overline{PQ}$, origen P y destino Q. Tan sólo hay que trasladar este vector y hacer que el origen sea Q, para obtener el punto S. En Geogebra es muy fácil este apartado pero lo importante es que los estudiantes visualicen esta idea de que Q es el punto medio de P y S. El resultado es el punto $S(2, 3, 1)$.

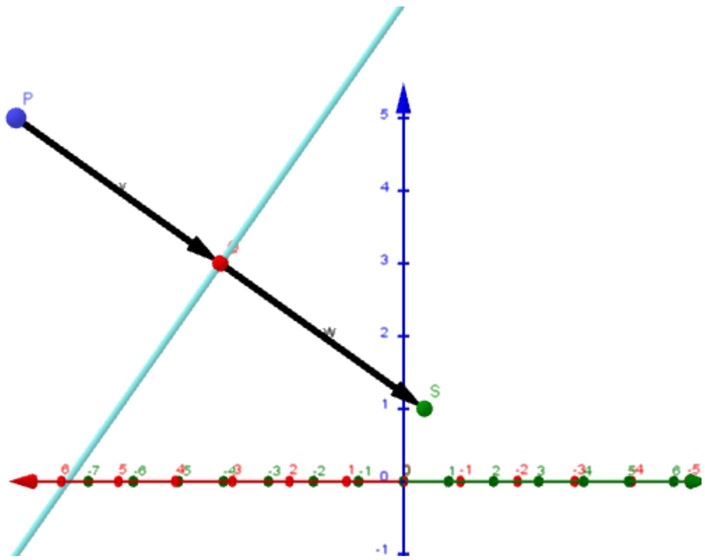

Figura 4: *Obtención del punto S, simétrico de P respecto de la recta r.*

Una vez que se ha solucionado con Geogebra y se ha ayudado a que los alumnos visualicen mejor que el punto Q es el punto medio de P y S se calcula las coordenadas de este punto. Al ser Q el punto medio, se cumple que la coordenada x del punto medio se obtiene como la semisuma de las coordenadas x de los puntos extremos; y lo mismo para las coordenadas y y z. Por tanto, si S(a,b,c) se puede escribir lo siguiente

$$\frac{a+6}{2} = 4 \quad ; \quad \frac{b-1}{2} = 1 \quad ; \quad \frac{c+5}{2} = 3.$$

Se obtiene $a = 2$, $b = 3$ y $c = 1$. Por tanto, las coordenadas de S son $S(2, 3, 1)$. Coordenadas que, obviamente, coinciden con las ofrecidas por Geogebra.

Anexo 4. EBAU Rioja Julio 2016

4.– (3 puntos) Sean r y s las rectas de ecuaciones

$$r : \frac{x}{2} = 2 - y = \frac{z-1}{3}, \qquad s : \begin{cases} x = 2 + a\,\lambda, \\ y = 2\,\lambda, \\ z = 5 - 6\,\lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(i) Halle una ecuación para el plano que pasa por $O(0,0,0)$ y es perpendicular a la recta r.

(ii) Estudie la posición relativa de las rectas r, s en función de a.

Se plantea este ejercicio en el aula para resolverlo simultáneamente en la pizarra y en Geogebra para ayudar a los estudiantes a visualizar mejor el problema.

El primer apartado del ejercicio pide la ecuación de un plano perpendicular a la recta r y que pasa por $O(0,0,0)$. El ejercicio da la ecuación continua de la recta r, pero la da de una forma poco habitual y que puede llevar al error a varios estudiantes; por eso, en clase se recalca la importancia de no caer en estos errores y lo primero que se hace es reordenar de una forma más típica la ecuación de la recta.

$$\frac{x}{2} = 2 - y = \frac{z-1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{3}$$

Una vez hecho esto, es fácil obtener un punto y un vector director de la recta r: $P_r(0,2,1)$ y $\overline{v_r} = (2,-1,3)$. Para solucionar el primer apartado en Geogebra lo primero es dibujar la recta. Se utiliza la herramienta *'Recta(<Punto>,<Vector director>)'*, con el punto P_r y el vector $\overline{v_r}$. Como el plano tiene que ser perpendicular a esta recta, su vector normal es el vector director de la recta. Así, con la herramienta *'PlanoPerpendicular (<Punto>,<Vector>)'*, como punto el $O(0,0,0)$ y como vector el plano $\overline{v_r}$ se obtiene el plano π y su ecuación general. $\pi \equiv 2x - y + 3z = 0$.

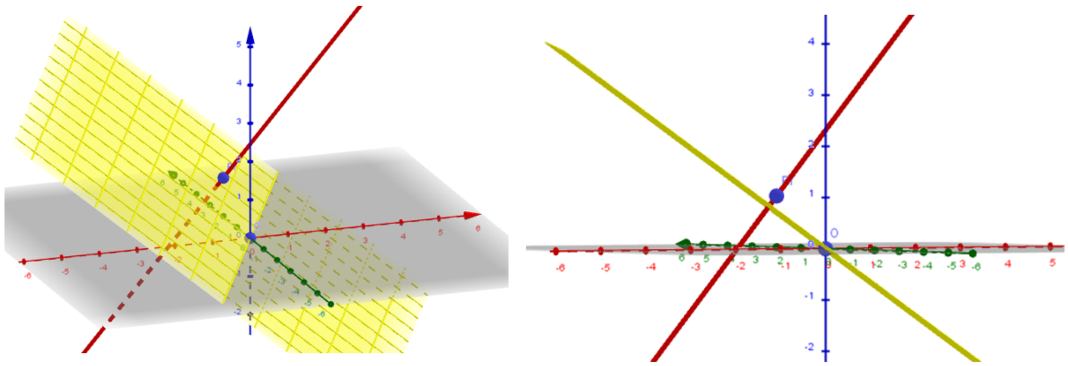

Figura 1: *Plano π perpendicular a la recta r.*

Para obtener la ecuación de este plano sin utilizar Geogebra, lo primero es plantear que la ecuación general del plano será del tipo

$$\pi \equiv 2x - y + 3z + D = 0,$$

ya que, como se ha comentado anteriormente, el vector director de la recta r, $\overline{v_r} = (2, -1, 3)$ es el vector normal al plano. Haciendo que el plano contenga al punto $O(0, 0, 0)$, se obtiene $D = 0$. Por lo tanto, la ecuación del plano es

$$\pi \equiv 2x - y + 3z = 0,$$

que es la misma que la que da como resultado Geogebra.

En el segundo apartado se un estudio de la posición relativa de las rectas r y s, que depende del parámetro a. La recta r ya está dibujada en Geogebra y se ha obtenido un punto y su vector director. El enunciado da las ecuaciones paramétricas de la recta s, por lo que es fácil obtener un punto y su vector director; $P_s(2, 0, 5)$, $\overline{v_s} = (a, 2, -6)$. Para poder representar la recta s en Geogebra se crea un deslizador para que el parámetro a pueda tomar diferentes valores. Una vez creado, se introduce la recta s con la herramienta *'Recta(<Punto>,<Vector director>)'*. Ya están representadas las dos rectas r y s y se puede estudiar su posición relativa variando el parámetro a con el deslizador. Se observa que, si $a = -4$ las rectas son paralelas y para todos los demás valores de a las rectas r y s se cruzan.

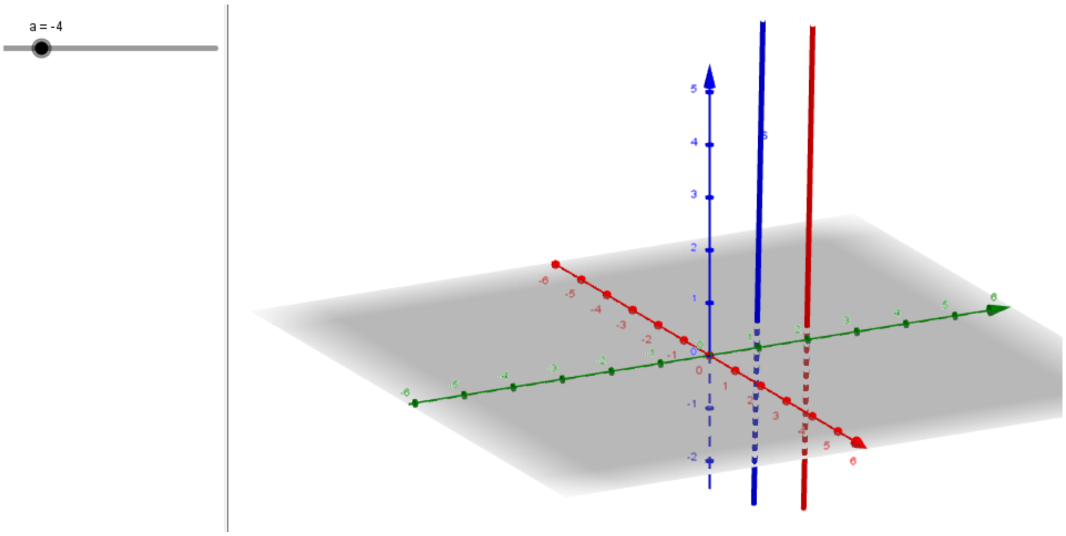

Figura 2: *Si* $a = -4$*, r y s son paralelas.*

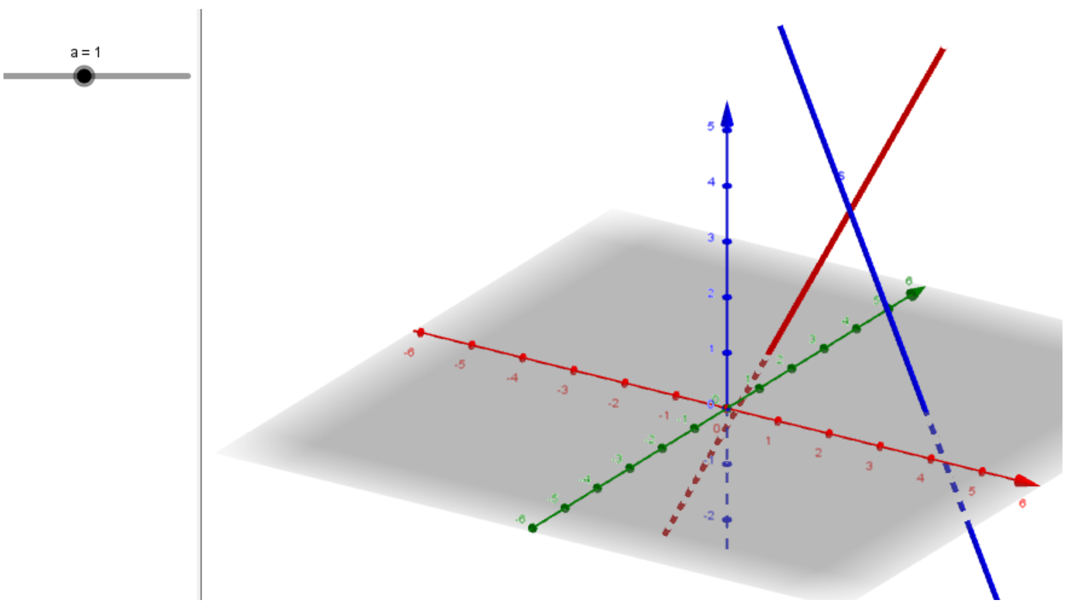

Figura 3: *Si* $a \neq -4$*, r y s se cruzan.*

Para estudiar la posición relativa de dos rectas con las herramientas matemáticas que se enseñan en 2º de Bachillerato, se debe estudiar el rango de la matriz A, creada con los vectores directores de las rectas y compararlo con el rango de la matriz A', que es la matriz A ampliada una fila con el vector que une un punto de una recta con un punto de la otra. En la siguiente tabla se recogen todas las posibles posiciones relativas en función de los rangos de A y A'.

Rango A	Rango A'	Posición relativa
1	1	Coincidentes
1	2	Paralelas
2	2	Secantes
2	3	Se cruzan

Cuadro 1: Posiciones relativas de dos rectas.

Para formar la matriz A', se crea un vector con origen en el punto P_r y destino en P_s. $\overline{P_rP_s} = (2, -2, 4)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 2 & -6 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 2 & -6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Se estudia el rango de la matriz A; para ello se estudia el rango de las 3 submatrices posibles.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 4 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -4$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad -12 - 3a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -4$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 6 - 6 = 0$$

Por lo tanto, el rango de la matriz A es 1 si $a = -4$ y es igual a 2 si $a \neq -4$.

Para calcular el rango de A' se calcula el determinante $3x3$.

$$|A'| = 16 - 6a + 12 - 12 - 24 + 4a \quad \Rightarrow \quad |A'| = -8 - 2a$$

El determinante de A' se anula cuando $a = -4$, por lo tanto si $a = -4$ el rango es 2 y si $a \neq -4$ el rango de A' es 3.

Viendo los rangos de A y de A', se pueden dar las siguientes opciones:

- $a = 0 - 4$

  $rg(A) = 1$

  $rg(A') = 2$

  Las rectas r y s son paralelas.

- $a \neq -4$

  $rg(A) = 2$

  $rg(A') = 3$

  Las rectas r y s se cruzan.

Como no puede ser de otra manera, el resultado al que se llega a través de las operaciones realizadas es el mismo que el que se ha observado en Geogebra.

Anexo 5. EBAU Rioja Junio 2016

4.– (3 puntos) Dadas las rectas

$$r_1 : x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, \quad r_2 : \begin{cases} x = 1, \\ y = -1 + t, \\ z = 1 - t \end{cases}$$

(i) Determine la posición relativa de las rectas r_1, r_2.

(ii) Halle el punto de la recta r_1 más próximo al punto $(1, 0, 1)$.

Se plantea este ejercicio en el aula para resolverlo simultáneamente en la pizarra y en Geogebra para ayudar a los estudiantes a visualizar mejor el problema.

En el primer apartado se pregunta por la posición relativa de las dos rectas dadas en el enunciado. Para dibujarlas en el Geogebra se busca un punto y el vector director de cada una de las rectas. En la primera, el punto es $P_1(0, 0, 0)$ y $\overline{v}_1 = (1, 2, 3)$. En la segunda recta, se toma el punto $P_2(1, -1, 1)$ y el vector director $\overline{v}_2 = (0, 1, -1)$. En la siguiente imagen se pueden ver las dos rectas.

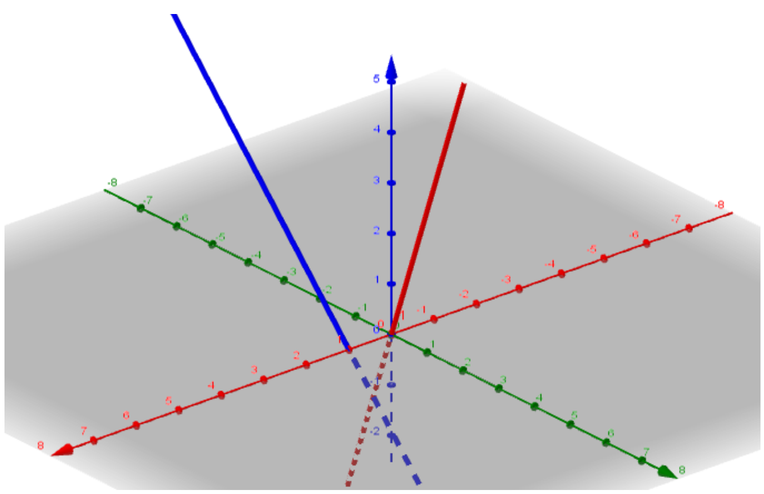

Figura 1: *Rectas r_1 y r_2.*

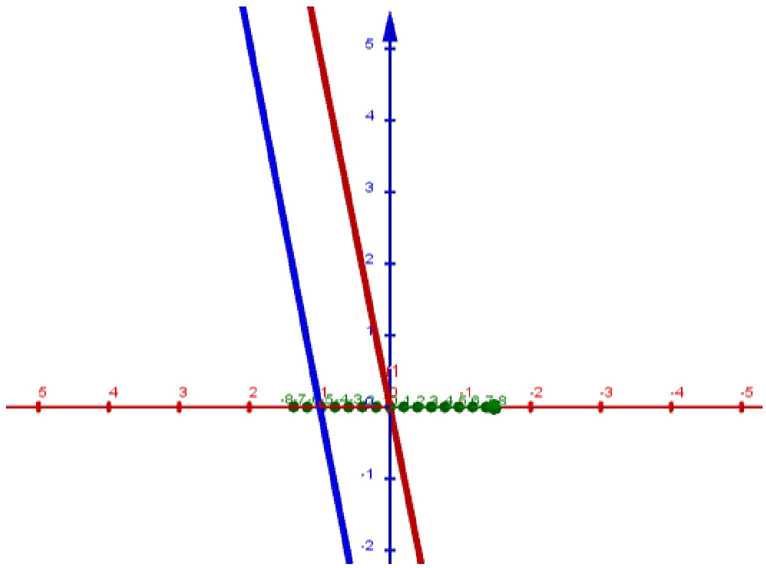

Figura 2: *Rectas r_1 y r_2.*

Se observa perfectamente que estas dos rectas se cruzan. Ahora hay que demostrarlo utilizando las herramientas que se han explicado a los estudiantes en clase.

Para ello, se estudia el rango de la matriz compuesta por los vectores directores de las rectas y el rango de la matriz ampliada con el vector $\overline{P_1P_2} = (1, -1, 1)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que el rango de A es 2 y el rango de A' es 3 ya que el determinante es distinto de 0. Por lo tanto el par de rectas r_1 y r_2 se cruzan. Se recuerda a los alumnos todas las posiciones relativas en función de los rangos de las matrices, que están recogidos en la siguiente tabla.

Rango A	Rango A'	Posición relativa
1	1	Coincidentes
1	2	Paralelas
2	2	Secantes
2	3	Se cruzan

Cuadro 1: Posiciones relativas de dos rectas.

En el apartado dos del ejercicio se pide el punto más cercano de la recta r_1 más próximo al punto (1,0,1). En este apartado viene muy bien el uso de Geogebra, ya que se debe reflexionar para ver qué es exactamente lo que pide el problema y cómo se puede resolver ya que no es inmediato. Cuando se pregunta por puntos más cercanos a una recta o un plano, siempre hay que pensar en el concepto de perpendicularidad. No es complicado pensar que el punto de la recta r_1 más cercano al punto P(1,0,1) será el punto de intersección de la recta y del plano perpendicular a ésta que pase por P. Primero, se soluciona con Geogebra para que los estudiantes visualicen esta idea y vean que, efectivamente, con este método se consigue el punto de la recta más cercano a P.

Lo primero es crear el plano Π; para ello, se necesita un punto y el vector normal ya que se va a utilizar la herramienta *PlanoPerpendicular (<Punto>,<Vector>)*. El punto será precisamente el punto $P(1,0,1)$ y el vector normal al plano es el vector director de la recta r_1, $\overline{v}_1 = (1,2,3)$. Una vez se tiene este plano, el punto Q es el que pide el enunciado, el más cercano a P que pertenezca a la recta r_1, y este punto se obtiene intersectando el plano π y la recta r_1; en Geogebra se utiliza la herramienta *Interseca (<Objeto>,<Objeto>)*. En las siguientes imágenes se puede ver el plano π perpendicular a r_1 y la obtención del punto Q, de coordenadas $Q(0{,}29, 0{,}57, 0{,}86)$.

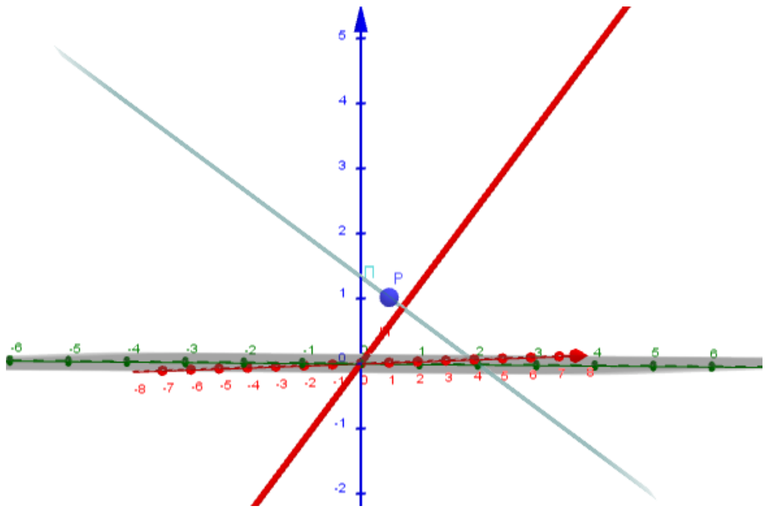

Figura 3: *Plano π perpendicular a r_1.*

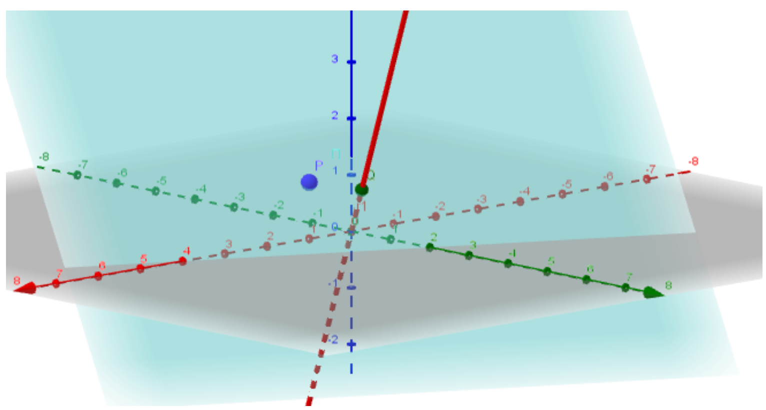

Figura 4: *Obtención del punto Q, intersección de π y r_1.*

Una vez se ha solucionado mediante Geogebra, se ha explicado y se ha visto que, efectivamente, el punto Q es el más cercano a la recta r_1 y para ello se debe trazar el plano π perpendicular a r_1, se soluciona en la pizarra este mismo apartado.

Para obtener la ecuación general del plano π, hay que tener un punto y un vector normal al plano. Ya se ha explicado antes que el punto es $P(1,0,1)$ y el vector normal es $\overline{v}_1 = (1,2,3)$. La ecuación del plano es del tipo

$$x + 2y + 3z + D = 0.$$

Para que pase por $P(1, 0, 1)$, se sustituyen en la ecuación la x, y y la z por las coordenadas de P y se obtiene $D = -4$. Por lo tanto la ecuación del plano es

$$x + 2y + 3z - 4 = 0.$$

Para obtener el punto Q, se debe intersectar la recta r_1 y el plano π. Para ello, se sustituye en la ecuación general del plano las ecuaciones paramétricas de la recta. Las ecuaciones paramétricas de la recta r_1 son las siguientes

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = t \\ \\ y = 2t \\ \\ z = 3t \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación general del plano se obtiene

$$x + 2 \cdot 2t + 3 \cdot 3t - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2}{7}$$

Si se sustituye este valor de t en las ecuaciones paramétricas de la recta r_1, se obtienen las coordenadas del punto Q, intersección de la recta y el plano π.

La solución de este segundo apartado del ejercicio es, por tanto, $Q(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7})$. Esta solución, como no puede ser de otra manera, coincide con la obtenida en Geogebra.

Anexo 6. EBAU Rioja Julio 2017

2.– (3 puntos)

(I) Pruebe que cualquiera sea el valor de a, los planos $\pi_1 : a\,x + a\,y - z = 0$, $\pi_2 : x - y + az = 0$ se cortan en una recta r.

(II) Estudie, en función de a, la posición relativa de la recta r y el plano que contiene a los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,0,2)$ y $C(0,1,2a)$.

Se plantea en el aula la resolución de este ejercicio de la EBAU; se resuelve simultánemante en Geogebra y en la pizarra para ayudar a los estudiantes a visualizar y entender mejor el problema.

En el primer apartado del ejercicio, se pide que se demuestre que los dos planos dados se cortan en una recta, sea cuál sea el valor de a. Para poder visualizar esto en Geogebra, primero sea crea un deslizador para el parámetro a para que pueda tomar distintos valores. Se crean los dos planos utilizando la herramienta *PlanoPerpendicular (<Punto>,<Vector>)*, el punto usado es el (0,0,0) en ambos planos ya que es un punto que pertenece a los dos. El vector debe ser el normal al plano, por tanto en el primer caso se usa el vector $\overline{u_1} = (a, a, -1)$ y en el segundo $\overline{u_2} = (1, -1, a)$. Con estos pasos se han creado dos planos que varían según el parámetro a pero que siempre se cortan en una recta, cómo se puede observar en las siguientes imágenes.

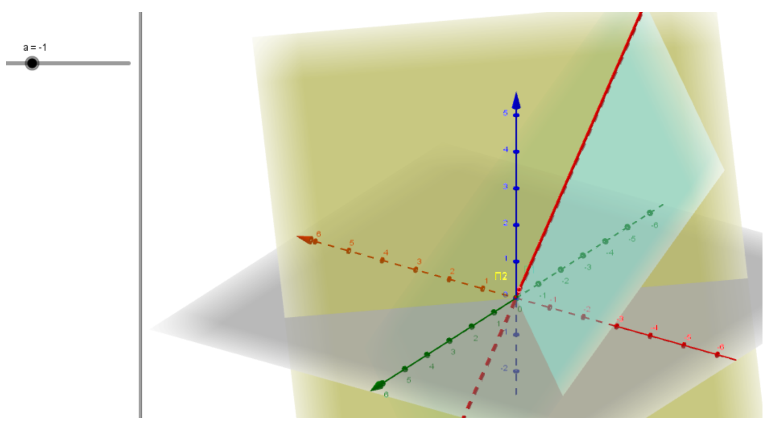

Figura 1: *Intersección de los planos con a=-1.*

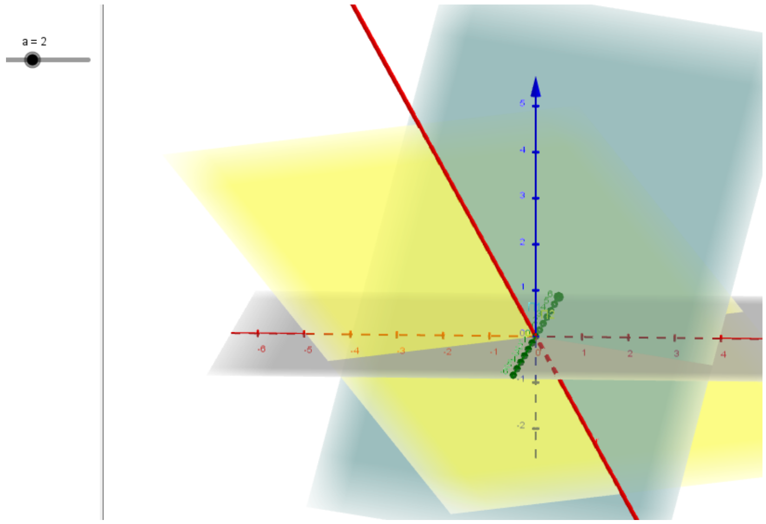

Figura 2: *Intersección de los planos con a=2.*

Una vez visto en Geogebra, se va a demostrar que los dos planos se cortan en una recta mediante las herramientas que se enseñan en clase. Para estudiar la posición relativa de los planos, se hallan la matriz de coeficientes y la matriz ampliada.

$$C = \begin{pmatrix} a & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes es 2, y también lo es el de la ampliada. Como R(C)=R(A), los planos se cortan en una recta.

En el segundo apartado se pide un estudio de la posición relativa de la recta r, que interseca los dos planos, y el plano que pasa por los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 2)$ y $C = (0, 1, 2a)$. Para solucionar este apartado en Geogebra, primero se tiene que obtener la ecuación de la recta r. Para ello, se utiliza la herramienta *Interseca (<Objeto>,<Objeto>)*, en la que los dos objetos son los dos planos; esta herramienta devuelve la recta r y su ecuación vectorial. Se introduce también los puntos A, B y C, este último en función del parámetro a. Después, utilizando la herramienta *Plano(<Punto>,<Punto>,<Punto>)* se obtiene el plano que pasa por estos tres puntos. Una vez que se tiene la recta r y el plano que pasa por los puntos A, B y C, se puede observar la posición relativa de la recta y el plano variando el parámetro a con el deslizador creado. En las siguientes imágenes se puede ver las diferentes opciones (recta en rojo y plano en verde).

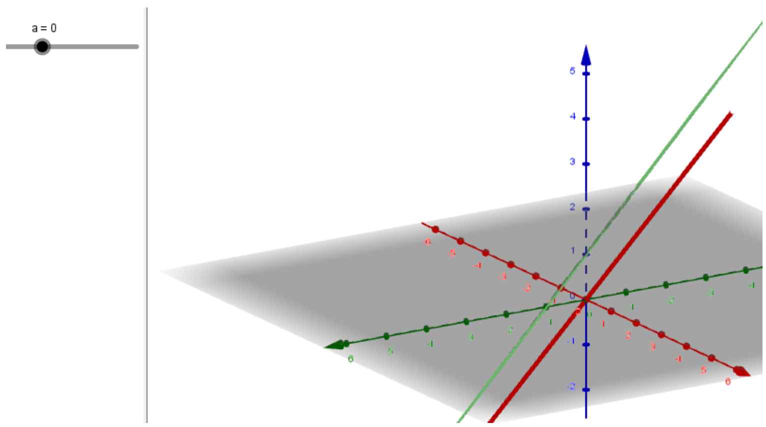

Figura 3: *Si a=0, recta paralela al plano.*

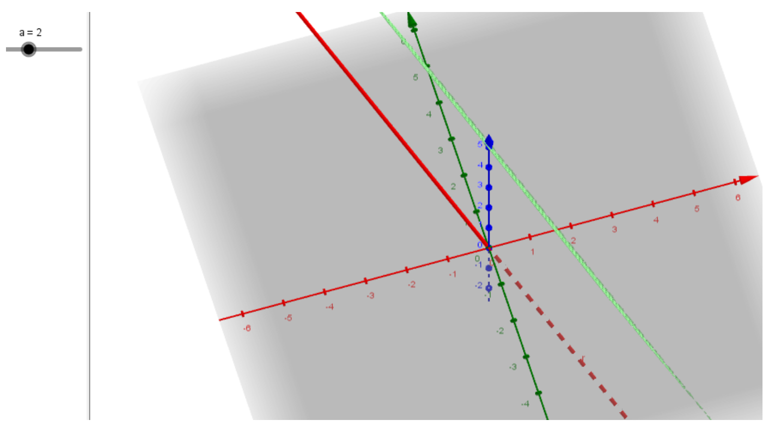

Figura 4: *Si a=2, recta paralela al plano.*

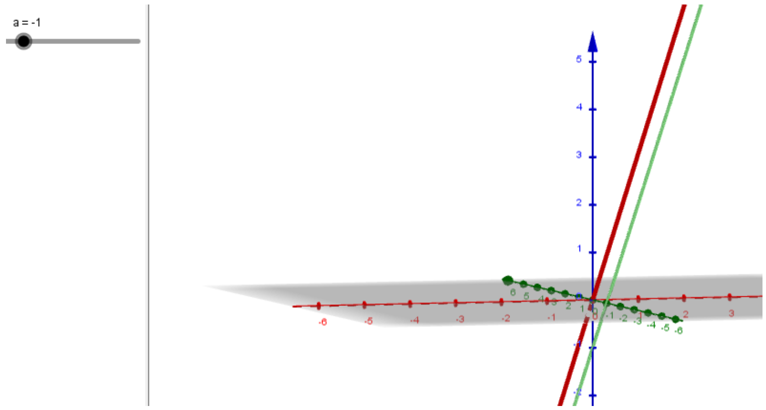

Figura 5: *Si a=-1, recta paralela al plano.*

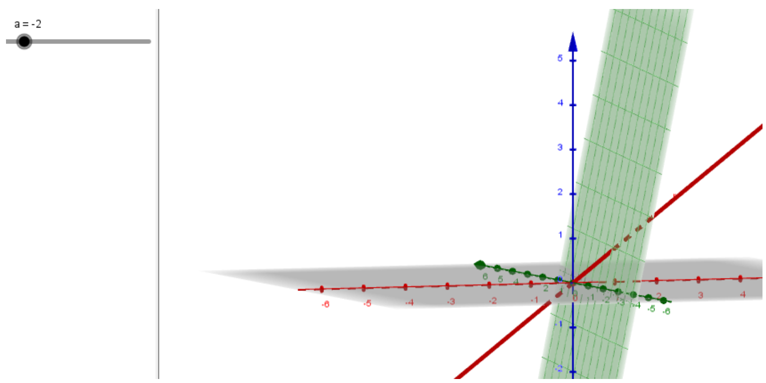

Figura 6: *En cualquier otro caso, por ejemplo a=-2, la recta y el plano se cortan.*

Una vez visto el problema en Geogebra, se debe solucionar en la pizarra este segundo apartado. Lo primero, como antes, es obtener la ecuación de la recta r, intersección de los dos planos. Para ello, se necesita un punto de la recta y el vector director. Es fácil ver que el punto (0,0,0) pertenece a los dos planos y por tanto, pertenecerá a la recta. Para obtener el vector director, se calcula el productor vectorial de los dos vectores normales de los planos.

$$\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$$

$$\overline{v} = (a^2-1)\overline{i} - (a^2+1)\overline{j} - 2a\overline{k}$$

La ecuación vectorial de la recta r será

$$r \equiv (0,0,0) + \lambda(a^2-1, -a^2-1, -2a)$$

Ahora, se debe obtener la ecuación del plano α que pasa por los puntos $A=(1,1,1)$, $B=(1,0,2)$ y $C=(0,1,2a)$. Para obtener un vector normal a dicho plano, realizaremos el producto vectorial de los vectores $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. $\overline{AB}=(0,-1,1)$ y $\overline{AC}=(-1,0,2a-1)$.

$$\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2a-1 \end{vmatrix} = (-2a+1)\overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$$

La ecuación del plano α que pasa por los puntos A, B y C será del tipo $(-2a+1)x - y - z + D = 0$. Imponiendo que contenga al punto $A(1,1,1)$, se obtiene $D = 2a+1$. Con lo cual, la ecuación del plano es la siguiente

$$\alpha \equiv (-2a+1)x - y - z + 2a + 1 = 0$$

.

Las posiciones relativas de una recta y un plano son: recta contenida en el plano, recta y planos paralelos y recta y plano secantes. Para que sean paralelos (o la recta contenida en el plano) el producto escalar del vector director de la recta y del vector normal al plano debe ser 0. Como este producto escalar depende del parámetro a, se estudia sus posibles valores.

$$(a^2-1, -a^2-1, -2a) \cdot (-2a+1, -1, -1) = 0$$

$$-2a^3 + 2a^2 + 4a = a(-2a^2+2a+4) = 0$$

Para que el producto escalar valga 0, o $a = 0$ o el polinomio $-2a^2 + 2a + 4 = 0$. Las raíces de este polinomio son 2 y -1. Por lo tanto, el producto escalar vale 0 para $a=0$, $a=2$ y $a=-1$. La posición relativa de la recta y el plano varía según el valor de a.

- $a = 0$

$$r \equiv (0,0,0) + \lambda(-1,-1,0)$$

$$\alpha \equiv x - y - z + 1 = 0$$

Recta y plano paralelos ya que el producto escalar es 0 y el punto (0,0,0) pertenece a la recta pero no al plano.

- $a = 2$

$$r \equiv (0,0,0) + \lambda(3,-5,-4)$$

$$\alpha \equiv -3x - y - z + 5 = 0$$

Recta y plano paralelos ya que el producto escalar es 0 y el punto (0,0,0) pertenece a la recta pero no al plano.

- $a = -1$

$$r \equiv (0,0,0) + \lambda(0,-2,-2)$$

$$\alpha \equiv 3x - y - z - 1 = 0$$

Recta y plano paralelos ya que el producto escalar es 0 y el punto (0,0,0) pertenece a la recta pero no al plano.

- $a \neq 0 \neq 2 \neq -1$

El producto escalar es distinto que 0 y por tanto la recta y el plano son secantes.

Estos resultados, como no puede ser de otra manera, coinciden con los que se obtiene del programa Geogebra.

Anexo 7. EBAU Rioja Julio 2013

1.– (1 punto) Calcula el valor de m para que la recta de ecuación $(\frac{x}{2} = y = z)$ y el plano de ecuación $(x - y + mz = 4)$ formen un ángulo de 30 grados.

El enunciado pide el valor del parámetro m para el cual la recta y el plano forman 30º. La recta viene dada en su ecuación continua, y no depende de m. Del plano dan su ecuación normal, que sí depende del parámetro m. Para dibujar la recta en Geogebra, se debe obtener un punto y un vector director; en este caso, $P_r(0,0,0)$ y $\overline{v_r} = (2,1,1)$. Para representar el plano, lo primero que se hace es crear un deslizador para el parámetro m, para que pueda coger distintos valores. Con la herramienta de Geogebra *PlanoPerpendicular (<Punto>,<Vector>)*, se dibuja el plano, dando el punto $P_\pi(4,0,0)$ y el vector normal al plano, $\overline{v_\pi} = (1,-1,m)$.

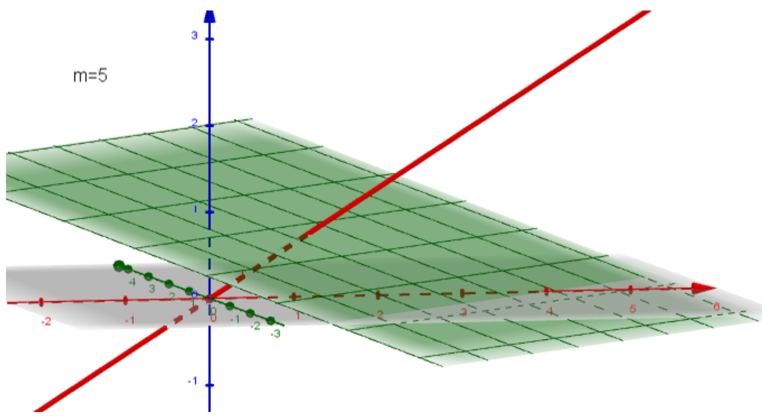

Figura 1: *Recta y el plano con* $m = 5$.

Una vez se tienen la recta y el plano representados, con la herramienta *Ángulo(<Recta>,<Plano>)*, Geogebra ofrece el resultado del ángulo que forman estos dos objetos. Dando distintos valores al parámetro m, se observa que para $m = 2$, el ángulo que forman la recta y el plano es de 30º.

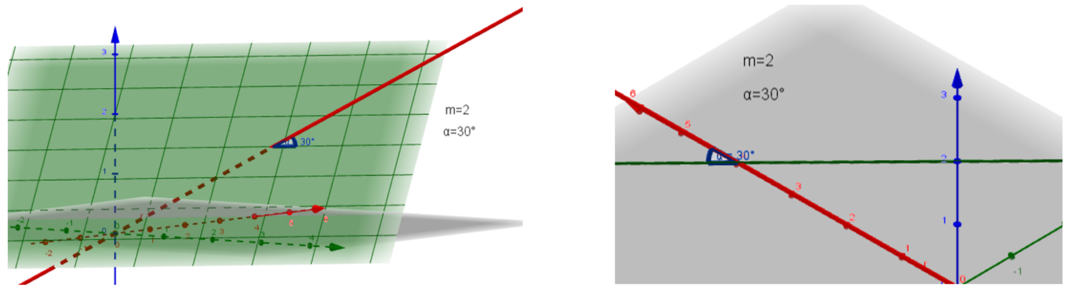

Figura 2: *La recta y el plano forman* 30^o *cuando* $m = 2$*.*

Para resolver este ejercicio en la pizarra, lo primero que se hace es recordar que el ángulo interviene en el producto escalar. Se sabe que

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = |\overline{u}||\overline{v}|cos\alpha$$

siendo α el ángulo que forman $\overline{u}$ y $\overline{v}$.

En la siguiente imagen se ve cómo el ángulo formado por la recta r y el plano π es el complementario del formado por el vector director de la recta $\overline{v_r}$ y el vector normal al plano $\overline{v_\pi}$.

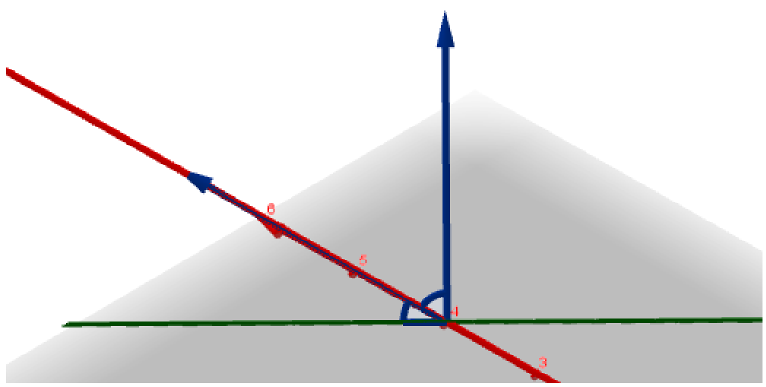

Figura 3: *Los ángulos formados por* r *y* π *y por* $\overline{v_r}$ *y* $\overline{v_\pi}$ *son complementarios.*

Por lo tanto, el seno del ángulo formado por la recta y el plano será igual al coseno del ángulo formado por los vectores. Como se impone que el ángulo α, formado por r y π sea de 30º; $sen(r, \pi) = cos(\overline{v_r}, \overline{v_\pi}) = \frac{1}{2}$.

Con el producto escalar de $\overline{v_r}$ y $\overline{v_\pi}$, se calcula el parámetro m para que α sea 30º.

$$\overline{v_r} \cdot \overline{v_\pi} = |\overline{v_r}||\overline{v_\pi}|cos\alpha$$

$$cos\alpha = \frac{\overline{v_r} \cdot \overline{v_\pi}}{|\overline{v_r}||\overline{v_\pi}|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{(2,1,1) \cdot (1,-1,m)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+(-1)^2+m^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1+m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2+m^2}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1+2m+m^2}{6 \cdot (2+m^2)}$$

$$12 + 6m^2 = 4 + 8m + 4m^2$$

$$m^2 - 4m + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (m-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 2$$

Por lo tanto, se llega al mismo resultado que había dado Geogebra. Para que la recta y el plano formen 30º, el parámetro m debe valer 2.

Anexo 8. Creación de problemas

En este anexo primero se va a solucionar un problema de geometría analítica y, después, modificando alguno de los datos o de los objetivos de este problema se va a crear otro.

∘ **Dado el plano $\pi \equiv x + 3y - 3z = 3$ y la recta $r = \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{3}$, calcula el plano α que contiene a r y es perpendicular a π.**

Para solucionar este problema en Geogebra primero se representan la recta r y el plano π. Para representar r se necesita un punto de la recta y un vector director; $P_r(0, 1, -1)$ y $\overline{v_r} = (2, -1, 3)$. Para representar π, se necesita también un punto y el vector normal del plano; $P_\pi(3, 0, 0)$ y $\overline{v_\pi} = (1, 3, -3)$.

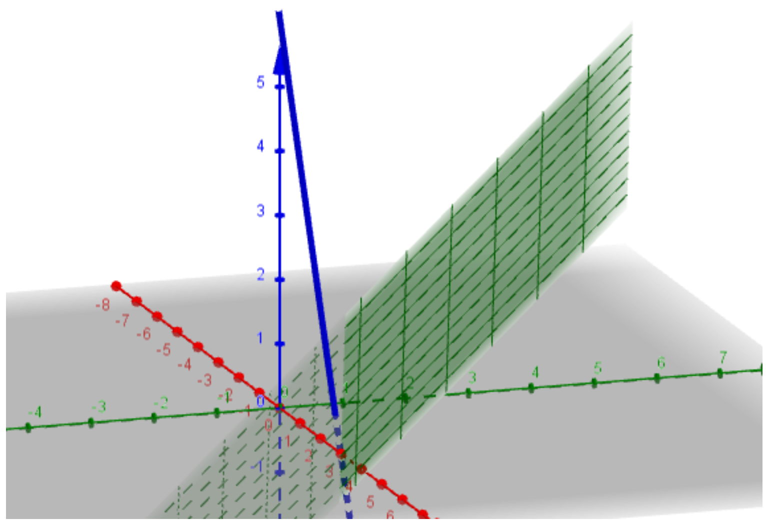

Figura 1: Recta r y plano π.

El plano α que pide el problema contiene a la recta r; por lo tanto, contiene al punto $P_r(0, 1, -1)$, y $\overline{v_r} = (2, -1, 3)$ es un vector director de este plano. Como α es perpendicular al plano π, el vector normal de π es un vector director del plano α. Por lo tanto, con dos vectores directores y un punto, ya queda definido el plano α.

Para dibujar este plano en Geogebra se va a utilizar la herramienta *'Plano(<Punto>,<Punto>,<Punto>)'*, mediante la cual se representa un plano con 3 puntos que pertenecen a dicho plano. El primer punto que se usa es $P_r(0,1,-1)$. Los otros dos puntos resultan de sumarle a P_r los dos vectores directores del plano; $A = P_r + \overline{v_r}$ y $B = P_r + \overline{v_\pi}$.

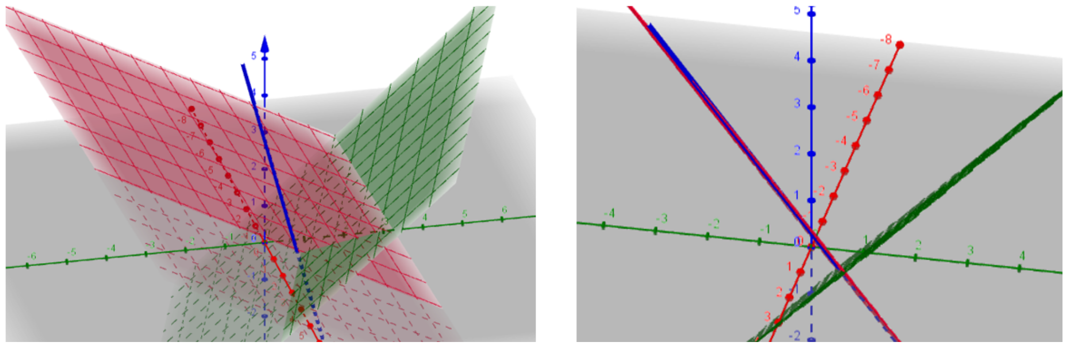

Figura 2: Plano α, que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Para obtener la ecuación de este plano en la pizarra, se debe calcular el producto vectorial de los dos vectores directores ya que, el resultado de este producto vectorial, será un vector normal al plano α.

$$\overline{u} = \overline{v_r} \times \overline{v_\pi} \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -6\overline{i} + 9\overline{j} + 7\overline{k}$$

Por lo tanto, ya se sabe que la ecuación del plano es del tipo $-6x + 9y + 7z + D = 0$. Como el plano debe contener al punto $P_r(0,1,-1)$, se puede obtener D.

$$0 + 9 - 7 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -2$$

Por lo tanto, la ecuación del plano es $\alpha \equiv -6x + 9y + 7z - 2 = 0$.

Para crear un problema a partir del anterior, una estrategia que se puede seguir es la manipulación del objetivo del problema; por ejemplo, en este caso daba un plano π y una recta r y pedía otro plano. Con los datos dados, se puede preguntar por la ecuación de la recta que pasa por el punto $O(0,0,0)$ y que es perpendicular al plano π.

Así, para solucionar este nuevo problema, se debe obtener un punto y un vector director de la nueva recta, s. El punto es el origen de coordenadas O y el vector director coincide con el vector normal al plano π, ya que π y s son perpendiculares. Entonces, con $O(0,0,0)$ y $\overline{v_\pi} = (1,3,-3)$, se puede representar la recta s en Geogebra.

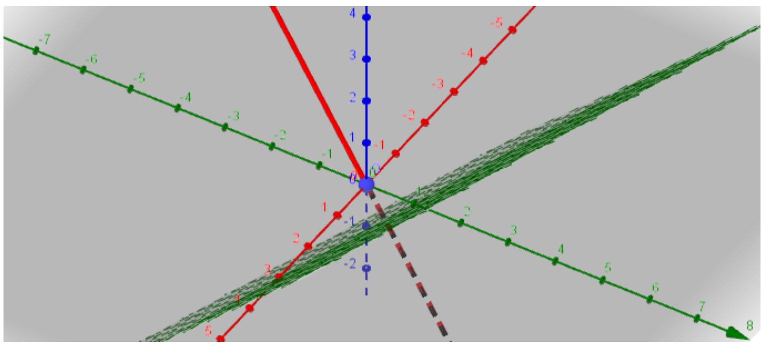

Figura 3: Recta s, perpendicular al plano π y que contiene a $O(0,0,0)$.

La obtención de la ecuación de esta recta s es inmediata teniendo un vector director y un punto por el que pasa la recta. La ecuación vectorial será

$$s \equiv (0,0,0) + \lambda(1,3,-3).$$

Otra estrategia para crear un problema nuevo a partir del otro es cambiar los datos del problema original manteniendo el objetivo. Por ejemplo, en el problema original el objetivo era obtener la ecuación de un plano que contuviese a la recta r y fuese perpendicular al plano π. El objetivo en este problema va a ser el mismo pero se cambia la ecuación del plano $\pi \equiv 2x + y + z = 6$. La ecuación de la recta sigue siendo la misma, $r = \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{3}$.

La estrategia de resolución de este problema es la misma que la del original, simplemente cambia el plano π. Por lo tanto, tal y como se ha explicado antes, el plano α, contiene al punto $P_r(0, 1, -1)$ y el vector $\overline{v_r} = (2, -1, 3)$ es un vector director de este plano. Como además, α es perpendicular a π, el vector normal de π es director del plano α, $v_\pi = (2, 1, 1)$. Con estos dos vectores directores y el punto P_r, ya queda definido α.

Para representarlo en Geogebra se usa la herramienta *'Plano(<Punto>, <Punto>, <Punto>)'*. Uno de los puntos es $P_r(0, 1, -1)$ y los otros dos resultan de sumarle a P_r los dos vectores directores del plano; $A = P_r + \overline{v_r}$ y $B = P_r + \overline{v_\pi}$.

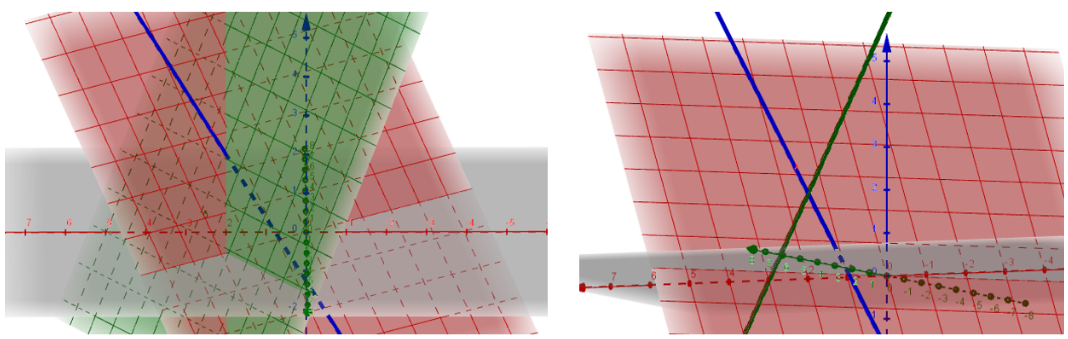

Figura 4: Plano α, que contiene a r y es perpendicular al plano π.

Para calcular la ecuación de α en la pizarra, como antes, hay que calcular el producto vectorial de los dos vectores directores para obtener un vector normal al plano.

Para obtener la ecuación de este plano en la pizarra, se debe calcular el producto vectorial de los dos vectores directores ya que, el resultado de este producto vectorial, será un vector normal al plano α.

$$\overline{u} = \overline{v_r} \times \overline{v_\pi} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k}$$

Entonces, la ecuación del plano es del tipo $-4x + 4y + 4z + D = 0$, o simplificando $-x + y + z + D = 0$. Como el plano debe contener al punto $P_r(0, 1, -1)$, se puede obtener D.

$$0 + 4 - 4 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 0$$

Por lo tanto, la ecuación del plano es $\alpha \equiv -x + y + z = 0$.

Anexo 9. Ejemplo de contextualización

Se tiene un terraplén cuya sección es un triángulo rectángulo. Si imaginamos un eje de coordenadas, la parte oblicua del terraplén la conforma el plano $x + z = 3$, con $x \in (0, 3)$. Una tubería dentro del terraplén sigue la recta $y = 0$. Por motivos de seguridad, la tubería debe estar a más de 2 metros de la superficie. ¿Se cumple la medida de seguridad?

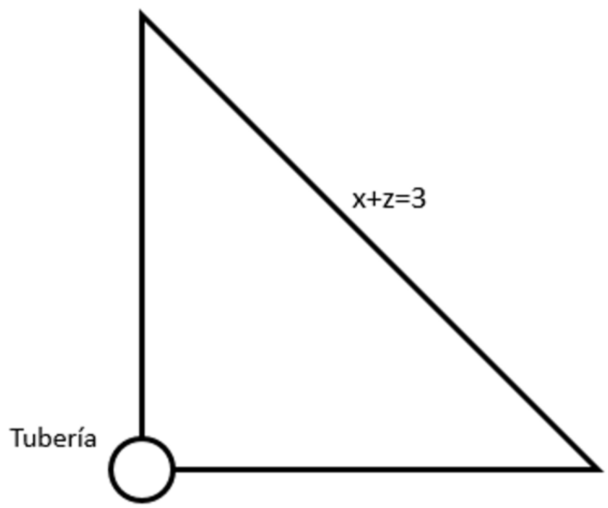

Figura 1: *Perfil del terraplén.*

Para comprobar si se cumple la medida de seguridad se debe calcular la distancia entre el plano $\pi \equiv x + z = 3$ y la recta $r \equiv y = 0$.

Para calcular esta distancia en Geogebra, primero se introduce el plano π. Para ello, se necesita un punto y un vector normal. Se toma $P_\pi(3, 0, 0)$ y $\overline{v_r} = (1, 0, 1)$. Una vez se ha dibujado el plano, se puede calcular la distancia con la herramienta *'Distancia(<Punto>,<Objeto>)'*. Se coge como punto cualquiera de la recta, por ejemplo $O(0, 0, 0)$ y como objeto el plano π. El resultado es 2,12, por lo tanto sí se cumple la medida de seguridad.

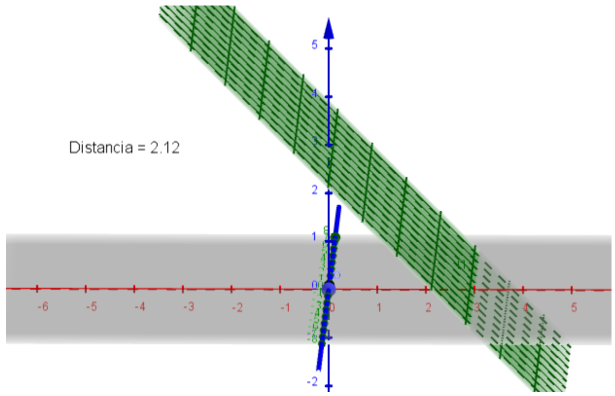

Figura 2: *Solución del ejercicio en Geogebra.*

Para solucionar este ejercicio en la pizarra se puede utilizar la fórmula de la distancia de un punto a un plano, utilizando $O(0,0,0)$ como punto. La distancia de un punto $P(x_p, y_p, z_p)$ a un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, se puede determinar con la fórmula:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_p + By_p + Cz_p + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

En el caso particular de este ejercicio:

$$d(O, \pi) = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2{,}12$$

El resultado es mayor que $2m$ y por tanto, se cumplen las medidas de seguridad.

Anexo 10. Prueba de evaluación

1. (2 pts.) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección del plano $\pi \equiv 2x + 3y - 2z = 6$ con los ejes OX y OY.

2. (3 pts.) Discute la posición de los planos π_1, π_2 y π_3 en función del parámetro a.

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv 3x - ay + 2z = a - 1 \\ \pi_2 \equiv 2x - 5y + 3z = 1 \\ \pi_3 \equiv x + 3y - (a-1)z = 0 \end{cases}$$

3. (3 pts.) Sea π el plano de ecuación $\pi \equiv 4x + ay + 4z = 1$ y r la recta que pasa por los puntos $(2, 0, -1)$ y $(-2, 1, 2)$.

- Discute, según los valores de a, la posición relativa de la recta y el plano. **(1.5 pts)**
- Cuando la recta y el plano se corten en un punto, halla las coordenadas de dicho punto. **(0.75 pts)**
- En el caso en el que π y r son paralelos, halla la distancia entre la recta y el plano. **(0.75 pts)**

4. (2 pts.) Halla el ángulo que forman la recta r con el plano π.

$$r \equiv \begin{cases} x + 3y - z + 3 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\pi \equiv 2x - y + 3z + 1 = 0$$